Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-5 Álgebra Lineal · Primavera 2024

Auxiliar 14[1]

Gram-Schmidt y diagonalización de matrices vol. iv

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 25 de noviembre de 2024

P1. [Cómo se dice]
Encuentre una base ortonormal del espacio generador por $\{v_1, v_2, v_3\}$ donde:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

P2. [Completitud]
Según indique el enunciado, estudie las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ y\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Justifique porqué es diagonalizable.

b) Indique la forma de la diagonalización que cada matriz admite.

c) Diagonalice A y B siguiendo el esquema general:

- **i)** Obtenga una expresión para el polinomio característico de la matriz.
- **ii)** Determine los valores propios de la matriz. Refiérase a sus multiplicidades algebraicas.
- **iii)** Calcule los subespacios vectoriales propios asociados a cada valor propio. Con ello, determine los vectores propios asociados a cada valor propio.
- **iv)** Obtenga una base de vectores propios ortonormal.
- **v)** Exhiba la diagonalización de la matriz.

P3. [Regalo]
Sea $V = \{\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w = 0\}$. Determine base ortonormal de V y otra de su ortogonal $V^{\perp}$.

P4. [Simetría]
Considere $S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica, que satisface: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio, $S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Encuentre matrices D diagonal y P invertible tal que $P^{-1} = P^T$, de forma que $S = PDP^T$.

[1] Auxiliar $n \iff$ Semana $n+1$... como $n = 14$ entonces $n+1 = 15$ i.e. se acabaron las semanas del 2024-2. Espero hayan disfrutado el curso tanto como yo (: A mi parecer, lo bonito y elegante de Álgebra Lineal es su manera de codificar información; en sus siguientes cursos notarán que es natural la aparición de los objetos y nociones que conocieron aquí, así que espero que apliquen todo lo que aprendimos <3

Principales definiciones y propiedades

- **[Valores y vectores propios]**: Sea $L\colon V \to V$ una aplicación lineal sobre V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que $v \in V$ es un **vector propio** de L si y solo si:

  i) $v \neq 0$

  ii) $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : L(v) = \mu v$

  El escalar de **ii)** se denomina **valor propio**.

  Recordando que una aplicación lineal se puede representar por $v \mapsto Av$ con $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces se dice que $v \in V \setminus \{0\}$ es **vector propio** de A si y solo si $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : Av = \mu v$.

- **[Caracterizaciones de valor propio]**: Considere $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la identidad en el mismo espacio. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - $\mu \in \mathbb{K}$ es valor propio de A.
  - $(\exists\ v \neq 0) : Av = \mu v$.
  - Existe $v \neq 0$ solución del sistema $(A - \mu I)v = 0$.
  - $W_\mu := \mathrm{Ker}(A - \mu I) \neq \{0\}$.
  - $A - \mu I$ no es invertible.
  - $\det(A - \mu I) = 0$.

- **[Subespacio vectorial propio]**: Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, I la identidad en el mismo espacio y $\mu \in \mathbb{K}$, corresponde al núcleo de $A - \mu I$, y se denota por $W_\mu(A - \mu I)$.

- **[Polinomio característico]**: Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la matriz identidad en el mismo espacio. Su polinomio característico se define por:

  $$p_A(\mu) = \det(A - \mu I)$$

  Luego μ es valor propio de A si y solo si μ es raíz de su polinomio característico.

- **[Multiplicidades]**: Sea $\beta \in \mathbb{K}$ un valor propio de la matriz $M \in \mathcal{M}_{nn}$. La multiplicidad **geométrica** de β se denota por $\gamma_M(\beta)$ y corresponde a la dimensión de su subespacio vectorial propio. La multiplicidad **algebraica** de β se denota por $\alpha_M(\beta)$ y corresponde a la máxima potencia de su factor $(\mu - \beta)$ en el polinomio característico. Siempre se tiene que $1 \leq \gamma_M(\beta) \leq \alpha_M(\beta) \leq n$.

- **[Propiedades de valores y vectores propios]**:
  - Los valores propios de una matriz invertible siempre son distintos de cero.
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
  - Una matriz de $n \times n$ admite a lo más n valores propios distintos.
  - Si una matriz de $n \times n$ tiene a lo más n valores propios distintos, entonces es diagonalizable. La recíproca es falsa (pensar en ejemplo auxiliar 11).

- **[Caracterizaciones de matriz diagonalizable]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sus valores y vectores propios asociados, respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - A es diagonalizable.
  - A es similar a una matriz diagonal.
  - Existen P invertible y D diagonal matrices de $n \times n$ tales que $A = PDP^{-1}$, donde la columna i-ésima de P almacena el i-ésimo vector propio v_i, así como la entrada i, i-ésima de D almacena el i-ésimo valor propio, asociado a v_i.
  - Existe base de $\mathbb{R}^n$ por vectores propios de A.
  - La suma de las dimensiones de todos los subespacios vectoriales propios es n.
  - La multiplicidad geométrica y algebraica coinciden para cada valor propio.
  - Su polinomio característico de factoriza completamente en $\mathbb{R}$ en factores lineales y las multiplicidades coinciden para todo valor propio.

- **[Producto punto]**: La función $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ es tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = x^T y$, es bilineal y conmuta.

- **[Normalizar]**: Un vector está **normalizado** si su norma, definida como la raíz cuadrada del producto punto consigo mismo, es 1.

- **[Ortogonalidad]**: Dos vectores son **ortogonales** si y solo si su producto punto resulta nulo.

- **[Matrices simétricas]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces se satisface lo siguiente:
  - A es diagonalizable.
  - La matriz P que almacena a los vectores propios de A es **ortogonal** o **unitaria** i.e. $P^{-1} = P^T$.
  - Los vectores propios de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos de A son ortogonales entre sí.