Auxiliar 3

Vectores tangentes y normales, e integrales de flujo y superficie

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal
Fecha: 28 de agosto de 2024

P1. [Sistemas de coordenadas ortogonales]

a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por $x = \text{sen}(\beta)$, $y = \mu$, $z = \cos(\beta)$, donde las variables son tales que $0 \leq \beta \leq 2\pi$ y $-1 \leq \mu \leq 3$. Comente sobre la regularidad de las superficies.

b) Las coordenadas parabólicas (ν, η, ϕ) tienen a sus parámetros $\nu, \eta > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$ y se definen por las relaciones $x = \nu\eta\cos(\phi)$, $y = \nu\eta\,\text{sen}(\phi)$, $z = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \nu^2\right)$. Obtenga expresiones para la divergencia y el gradiente en estas coordenadas. **Indicación:** Le será útil calcular los factores de escala del sistema.

c) Proponga parametrización regular de Σ la superficie del elipsoide definido por la ecuación $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$.

P2. [Visitando superficies]

a) Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{A}} \frac{x^2}{z}\, d\mathcal{S}$ para la superficie dada por $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$.

b) Sea $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0, x_2 > 0, 0 < x_3 < 3, x_3^2 = 3\left(x_1^2 + x_2^2\right)\}$. ¿Cuánto vale $\displaystyle\iint_Z \left(x_1^2 + x_2^2\right) dS$?

c) Un helicoide se puede parametrizar en coordenadas cilíndricas por $\vec{\sigma}(\rho, \theta) = \left(\rho\cos(\theta), \rho\,\text{sen}(\theta), \dfrac{h}{2\pi}\theta\right)$ donde los parámetros son tales que $0 \leq \rho \leq a$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Obtenga el área del helicoide.

P3. [Atravesando superficies]

a) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, xz)$ a través del triángulo de vértices $(1, 0, 0)$,$(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ orientado según la normal exterior. **(propuesto)** Repetir el cálculo con superficie orientada al contrario.

b) S es la superficie cerrada formada por la parte del cilindro de dos tapas $x^2 + y^2 = 4$ que está comprendida entre los planos $z + y = 2$ y $z = 0$. Determine el flujo saliente del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xy, yz)$.

P4. [Aplicaciones]
C es la sección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra encerrada por el cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. La densidad de masa en cada punto de C se define por $\delta(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z}$. Calcule la masa total de C.