DESARROLLO AUX 3

VECTORES TANGENTES, NORMALES E INTREGALES DE FLUJO Y SUPERFICIE

MA2002-1
2024-2

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal

P_1

$\varphi(u, v, w) \equiv$ coordenadas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \equiv \tau_u , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \equiv \tau_v$$

$$\left.\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|} \equiv \hat{\tau}_u \equiv \hat{u} , \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} \equiv \hat{\tau}_v \equiv \hat{v} \right\}$$ el $(\hat{\ })$ indica que están normalizados

P_1 a) $x = sen(\beta),\ y = \mu,\ z = \cos(\beta) \rightarrow$ sup.

$0 \leq \beta \leq 2\pi,\ -1 \leq \mu \leq 3$

Encontrar vector normal a la superficie.

1) Hay que identificar la superficie.

2) Parametrizarla

3) El vector normal surge del producto cruz de los $\overbrace{\text{tangentes}}^{2.5)}$.

① $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = sen(\beta) \wedge y = \mu \wedge z = \cos(\beta)\}$

para $\beta \in [0, 2\pi] \wedge \mu \in [-1, 3]$.

↳ superficie es conjunto de puntos que satisfacen una restricción.

② Para parametrizarla i.e. "visitarla" hay que tomar los parámetros que la definen (β y μ, en este caso) e indicar la forma de los puntos (las restricciones $x = sen(\beta)$, $y = \mu$, $z = \cos(\mu)$)

$$\begin{cases} \varphi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad (\beta, \mu) \mapsto \varphi(\beta, \mu) = \begin{pmatrix} sen(\beta) \\ \mu \\ \cos(\beta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$D := \{(\beta, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \in [0, 2\pi] \wedge \mu \in [-1, 3]\}$

(2.5) Ahora se van a calcular los vectores tangentes, que almacenan la información para la variación c/r a cada variable.

$$* \ \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ 0 \\ -\operatorname{sen}(\beta) \end{pmatrix} =: \tau_\beta$$

$$* \ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \tau_\mu$$

(3) Se hace el producto cruz:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)}_{\tau_\beta \times \tau_\mu} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(\beta) & 0 & -\operatorname{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\beta) \\ 0 \\ \cos(\beta) \end{pmatrix} =: n$$

Notar que $\|\tau_\beta \times \tau_\mu\|^2 \overset{\text{def. } \|\cdot\|^2}{=} (\tau_\beta \times \tau_\mu) \cdot (\tau_\beta \times \tau_\beta)$

$$= \operatorname{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$$

$$\Rightarrow \|\tau_\beta \times \tau_\mu\| = \sqrt{1} \neq 0 \longrightarrow \text{se puede normalizar}$$

Así, $\hat{n} := \dfrac{\tau_\beta \times \tau_\mu}{\|\tau_\beta \times \tau_\mu\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\beta) \\ 0 \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$ ∎

Obs.: La superficie es regular siempre que el vector normal se puede definir, y esto ocurre si el denominador está bien definido, o sea, es no nulo, y un producto cruz es $\neq 0$ sólo cuando los vectores no son paralelos i.e. son l.i. En este caso, $\{\tau_\beta, \tau_\mu\}$ es l.i.

$\Rightarrow S$ es regular.

P1 b) $(\nu, \eta, \phi) \equiv$ "coordenadas parabólicas"

$\nu, \eta > 0, \; \phi \in [0, 2\pi]$

$$x = \nu\eta\cos(\phi),\; y = \nu\eta \operatorname{sen}(\phi),\; z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \nu^2)$$

Obtener divergencia y gradiente en estas coordenadas.

En coordenadas ortogonales $\vec{r}(u, v, w)$:

$$\star\; \nabla f = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\hat{u} + \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\hat{v} + \frac{1}{h_f}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\hat{w}$$

$$\star\; \nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\left(\frac{\partial F_u}{\partial u}\right)h_v h_w + \left(\frac{\partial F_v}{\partial v}\right)h_v h_w + \left(\frac{\partial F_w}{\partial v}\right)h_u h_v\right)$$

O sea, hay que calcular $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ y factores de escala. El problema se reduce a eso :)

Sea $\vec{r}(\nu, \eta, \phi) = \left(\nu\eta\cos(\phi), \nu\eta\operatorname{sen}(\phi), \frac{1}{2}(\eta^2 - \nu^2)\right)$

Ahora se calcularán los vectores normalizados $\hat{\nu}, \hat{\eta}, \hat{\phi}$ (i.e. cada vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ y su norma)

Para concluir, deben darse $f, \vec{F}$ escalar, vectorial, respect., y usar estas definiciones :)

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} = (\eta\cos(\phi), \eta\operatorname{sen}(\phi), -\nu)$

  $\Rightarrow \left\|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}\right)\right\| \underset{\text{def. } \|\cdot\|}{=} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}\right)} = \sqrt{\eta^2 + \nu^2} \equiv h_\nu$

  $\hat{\nu} = \frac{1}{h_\nu}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}\right)$ //

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = (\nu\cos(\phi), \nu\operatorname{sen}(\phi), \eta)$

  $\Rightarrow \left\|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right)\right\| \underset{\text{def. } \|\cdot\|}{=} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right)} = \sqrt{\nu^2 + \eta^2} \equiv h_\eta$

  $\hat{\eta} = \frac{1}{h_\eta}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right)$ //

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\nu\eta\operatorname{sen}(\phi), \nu\eta\cos(\phi), 0)$

  $\Rightarrow \left\|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)\right\| \underset{\text{def. } \|\cdot\|}{=} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)} = \sqrt{(\nu\eta)^2} = |\nu\eta| = \nu\eta \equiv h_\phi$

  $\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)$ //

P1 c)

Forma de balón de rugby

$\Sigma \equiv$ superficie de elipsoide $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$

Proponer parametrización regular de Σ

La intuición es que el elipsoide es " "como" " una esfera, entonces es "natural" querer parametrizar su superficie con la estructura

$x=\text{sen}(\phi)\cos(\theta)$
$y=\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta)$
$z=\cos(\phi)$

Si se usa ese esquema, los puntos de esa parametrización no satisfacen la ecuación por constantes:

$$\alpha^2\frac{\text{sen}^2(\phi)\cos^2(\phi)}{\alpha^2}+\beta^2\frac{\text{sen}^2(\phi)\,\text{sen}^2(\theta)}{\beta^2}+\gamma^2\frac{\cos^2(\phi)}{\gamma^2}\neq 1$$

Pero si existieran los factores $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, sí se cumple y están en el elipsoide!

Con la idea anterior, la parametrización candidata a la superficie de elipsoide es:

$$\begin{cases} \varphi : [0,2\pi)\times[0,\pi)\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \qquad (\theta,\phi)\longmapsto \varphi(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\alpha\,\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\\ \beta\,\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta)\\ \gamma\cos(\phi)\end{pmatrix}\end{cases}$$

Será regular si los vectores tangentes son l.i., lo cual en efecto ocurre:

$\ast\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}-\alpha\,\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta)\\ \beta\,\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\\ \boxed{0}\end{pmatrix}$ $\quad\ast\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi}=\begin{pmatrix}\alpha\cos(\phi)\cos(\theta)\\ \beta\cos(\phi)\,\text{sen}(\theta)\\ \boxed{-\gamma\,\text{sen}(\phi)}\end{pmatrix}$

$\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)$ no puede ser ponderación de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$.

$\boxtimes$

P2

La idea de estos problemas será enfrentarse a los distintas formas en que se puede presentar el calcular una integral de superficie, y el procedimiento siempre es el mismo!

(P2) a) Calcular $\iint_A \frac{x^2}{z}\, dS$, para la superficie que cumple: $z = x^2+y^2$, $z \leq 1$

campo escalar

$\equiv$ "int. de superficie"

Solo son notaciones! No se puede calcular explícitamente porque aún no se visitan esas superficies.

1) Identificar superficie A

2) Parametrizar superficie γ

3) Calcular $\|n_\gamma\|$

4) Identificar campo escalar f

5) Calcular $f(\gamma)$

6) Calcular $f(\gamma)\|n_\gamma\|$

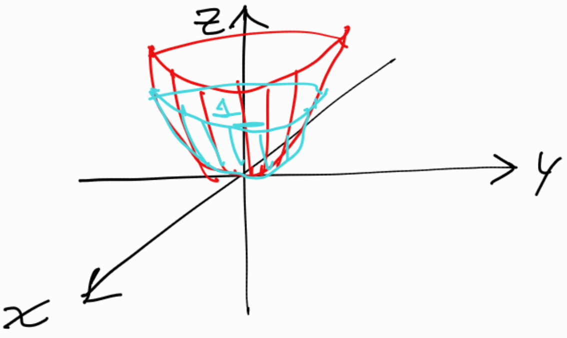
7) Calcular $\iint_A \frac{x^2}{z}\, dS \rightarrow \iint_D f(\gamma)\|n_\gamma\|$

$\gamma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Ahora, siguiendo el esquema propuesto:

1) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2 \wedge z \leq 1\}$

↳ paraboloide en eje z que apunta hacia arriba y considero "cuenco" hasta altura 1



2) Para la parametrización, hay que visitar los puntos. Notar que x, y son libres y z cumple restricción $z = x^2+y^2$. Así:

$$\begin{cases} \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad ; \quad \varphi \in \overbrace{\mathcal{C}^1}^{\text{simple}}$$

(polinomios)

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{\Leftrightarrow \rho^2 \leq 1}\}$

integrado

(Ya que después hay que calcular $f(\varphi)$, queda una expresión racional; mejor cambiar sistema de coordenadas).

cilíndricos

$x = \rho\cos(\theta)$
$y = \rho\,\text{sen}(\theta)$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta) \mapsto \tilde{\varphi}(\rho,\theta) = \varphi(\vec{r}(\rho,\theta,z)) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\,\text{sen}(\theta) \\ \rho^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con $\tilde{D} = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in [0,1] \wedge \underbrace{\theta \in [0,2\pi]}_{\text{siempre}}\}$

3) Para obtener el vector normal, hay que calcular los tangentes.

$* \ \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\rho} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 2\rho \end{pmatrix}$

$* \ \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\rho\,\text{sen}(\theta) \\ \rho\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

Ojo: son l.i. ssi $2\rho \neq 0$ ssi $\rho \neq 0$ así que regularidad se tiene en todos los puntos salvo si $\rho = 0$. (se puede excluir el punto para tener regularidad)

$* \ \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\rho} \times \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 2\rho \\ -\rho\,\text{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\rho^2\cos(\theta) \\ -2\rho^2\text{sen}(\theta) \\ \rho \end{pmatrix} =: n_{\tilde{\varphi}}$

$\Rightarrow \|n_{\tilde{\varphi}}\| \underset{\text{def. } \|\cdot\|}{=} \sqrt{n_\varphi \cdot n_\varphi} = \ldots = \rho\sqrt{4\rho^2+1}$

4) El integrando es el campo escalar $f=\frac{x^2}{z}$, que está bien definido en $\mathcal{E}^1$ salvo $z=0$

5) $f(\tilde{\varphi}(\rho,\theta)) = \cos^2(\theta)$

6) $f(\tilde{\varphi}(\rho,\theta))\,\|n_{\tilde{\varphi}}\| = \cos^2(\theta)\,\rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho\, d\theta$

7) Luego, como A es simple y regular:

$$\iint_A \frac{x^2}{z}\,dS = \iint_{\tilde{D}} f(\tilde{\varphi}(\rho,\theta))\,\|n_{\tilde{\varphi}}\|\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\,\rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho\,d\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho}_{\text{sustitución}}\ \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta}_{\text{usar que } \cos^2(\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{12}\left[5^{\frac{3}{2}}-1\right]}\cdot\underbrace{\pi}$$, calculando lo pedido. ∎

P2 b) $Z=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1>0,\ x_2>0,\ 0<x_3<3,\ x_3^2=3(x_1^2+x_2^2)\}$

Calcular $\iint_Z (x_1^2+x_2^2)\,dS$

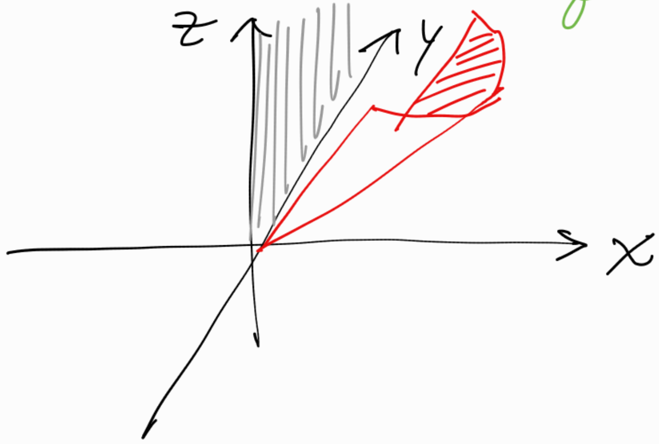
Usando los pasos de la parte anterior...

1) Para entenderla, se usarán otras letras:

$Z:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0 \wedge y>0 \wedge 0<z<3 \wedge z^2=3(x^2+y^2)\}$

cono

que solo está en cuadrante xy positivo



2) Para la parametrización, se puede usar de forma directa un cambio de variable (en la parte anterior igual, pero quería ejemplificar la formalidad).

Como aparecen exponentes al cuadrado $z^2=x^2+y^2$, conviene cilíndricos! Hay que reescribir restricciones:

$\begin{cases} x=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\cos(\theta)\end{cases} \wedge\ z^2=3(x^2+y^2) \Rightarrow z^2=3\rho^2 \Rightarrow z=\sqrt{3}\rho$

$\{0<z<3 \Rightarrow 0<\sqrt{3}\rho<3 \Rightarrow 0<\rho<\frac{3}{\sqrt{3}}$

$\begin{cases} x>0 \Leftrightarrow \rho\cos(\theta)>0 \overset{\rho>0}{\Rightarrow} \cos(\theta)>0 \Rightarrow \theta\in(0,\frac{\pi}{2}) \\ y>0 \Leftrightarrow \rho\,\text{sen}(\theta)>0 \underset{\rho>0}{\Rightarrow} \text{sen}(\theta)>0 \Rightarrow \theta\in(0,\frac{\pi}{2})\end{cases}$

$$\begin{cases} \varphi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \qquad (\rho,\theta) \mapsto \varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \\ \sqrt{3}\rho \end{pmatrix} \end{cases}$$

con $D = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in (0, \frac{3}{\sqrt{3}}) \wedge \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

3) Ahora se calculan los diferenciales

$$* \ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$* \ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho\sin(\theta) \\ \rho\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* \ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & \sqrt{3} \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\sqrt{3} \\ \rho\sin(\theta)\sqrt{3} \\ -\rho \end{pmatrix} = n_\varphi$$

$$\Rightarrow \|n_\varphi\| = \sqrt{n_\varphi \cdot n_\varphi} = \sqrt{3\rho^2 + \rho^2} = 2\rho$$

4) El campo escalar es $x^2 + y^2$ (en las nuevas letras)

5) $f(\varphi) = \rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) = \rho^2$

6) $f(\varphi)\|n_\varphi\| = 2\rho^3$

7) $$\iint_{Z_1} (x_1^2 + x_2^2)\,dS = \iint_{Z_1} (x^2+y^2)\,dS = \iint_D 2\rho^3\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} 2\rho^3\,d\rho\,d\theta = 4\pi \cdot \frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} = 9\pi,$$ calculando lo pedido. $\blacksquare$

P2 c) Propuesto // ¡¡

P_3

(P3) a) $\vec{S}(x,y,z) = (x^2, xy, xz)$ a través del triángulo formado por los vértices $(1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)$

campo vectorial ≡ "int. de flujo"

Solo son notaciones! No se pueden calcular explícitamente porque aún no se visitan esas superficies.

1) Identificar superficie S

2) Parametrizar superficie φ

3) Calcular n_φ

4) Identificar campo vectorial $\vec{F}$

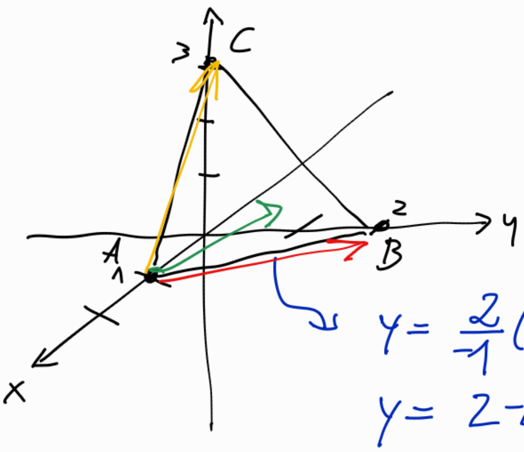
5) Calcular $\vec{F}(\varphi)$

6) Calcular $\vec{F}(\varphi) \cdot n_\varphi$

7) Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\varphi) \cdot n_\varphi$

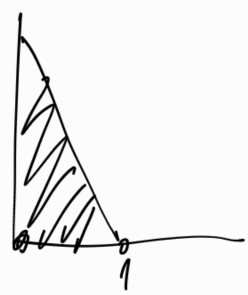
$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1) Hay que entender la región por la que hay flujo:



$y = \frac{2}{-1}(x-1)+0$ (Eq. recta)

$y = 2-2x$



$y \leq 2-2x$

Se debe calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$, donde $S \equiv \{$todo punto en triángulo$\}$

2) Se requiere parametrización.

Veamos ecuación del plano:

Fijamos $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A$

- $\vec{AB}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{AC}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$

} vectores directores

- $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}=\hat{n}_{\text{al plano}}$

- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in$ plano ssi $\left\langle\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0$

$$\iff 6(x-1)+3y+2z=0$$
$$\iff 6x+3y+2z=6$$

plano

- $\Pi_S: \; 6x+3y+2z=6, \qquad 0\leq x\leq 1$

$\iff 3x+\frac{3}{2}y+z=3 \qquad 0\leq y\leq 2$

$\iff z=-3x-\frac{3}{2}y+3 \qquad 0\leq z\leq 3$

Luego, los puntos se pueden visitar con

$$\begin{cases}\varphi: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\ \qquad (x,y)\mapsto\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\-3x-\frac{3}{2}y+3\end{pmatrix}\end{cases},\quad \varphi\in\mathcal{C}^1$$

con $D:=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,2x-2]\}$

3) *Hay que ver las variaciones:*

- $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

- $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

- $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \times \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = n$

$\neq 0$; φ es regular $\Downarrow$ S es regular

4) *El campo vectorial es* $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ xz \end{pmatrix}$

5) $\vec{F}(\varphi(x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ -3x^2 - \frac{3}{2}xy + 3x \end{pmatrix}$

6) $\vec{F}(\varphi(x,y)) \cdot \left(\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \times \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right) = \cancel{3x^2} + \cancel{\frac{3}{2}xy} - \cancel{3x^2} - \cancel{\frac{3}{2}xy} + 3x = +3x$

7) *Finalmente,* $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_D \vec{F}(\varphi(x,y)) \cdot \left(\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \times \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right) dx\,dy$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} 3x \, dy\, dx = \int_0^1 3x \left[y\right]_0^{2-2x} dy = 3\int_0^1 x(2-2x)\,dx$$

$$= 6\int_0^1 x\,dx - 6\int_0^1 x^2\,dx = 6 \cdot \frac{1}{2}\left[x\right]_0^1 - 6 \cdot \frac{1}{3}\left[x^2\right]_0^1$$

$= 3 - 2 = 1$, *calculando lo pedido.*

P3 b) Propuesta

P4

P4 $C \equiv$ sección del paraboloide descrito por

paraboloide $z = x^2+y^2$ que es encerrado por el cilindro $\boxed{(x-1)^2+y^2=1}$

$\delta(x,y,z) = \sqrt{1+4z}$ cilindro centrado en $(1,0)$ radio 1

$\equiv$ masa en cada punto de C

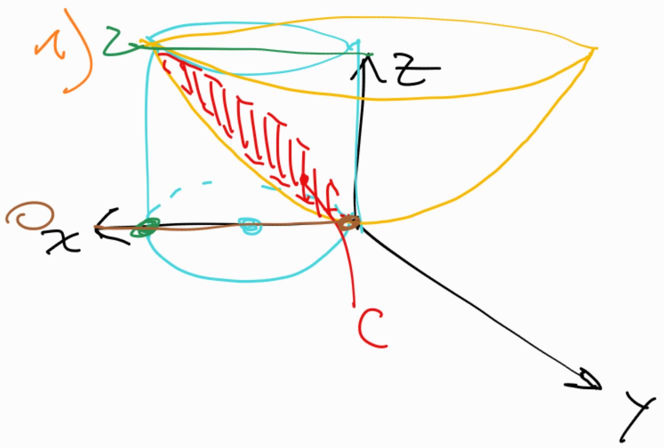
Calcular toda la masa de C

La idea de este ejercicio es aterrizar la noción de integral; siempre es considerar las contribuciones de lo que se tiene; en este caso, $\delta(x,y,z)$ es la masa en cada puntito.

¿Cómo se obtendría la masa de C? ¡Considerando la masa de cada puntito!

$$\text{masa}(C) = \iint_C \underbrace{\delta(x,y,z)}_{\text{escalar}} dS \equiv \text{integral de superficie/área}$$

Entonces una vez identificado lo que hay que calcular, hay que ver cómo finalizarlo. Ya se vio más arriba forma de calcular integral de superficie. Siguiendo ese esquema:

1) 

C es la sección que cumple

① $z = x^2+y^2$

② $(x-1)+y^2 = 1$

$\iff x^2+y^2 = 2x$

①=②:

$z = 2x$

- $\boxed{x=1 \Rightarrow z=2}$
- $\boxed{x=0 \Rightarrow z=0}$

2) Como aparecen sumas de términos al cuadrado, ¡apaña usar cilíndricas! Y la forma de visitar la superficie se puede hacer desplazando:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\,\text{sen}(\theta) \\ (z=z) \end{array}\right\}$$ Transformación a cilíndricas

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos(\theta)+1 \\ y=\rho\,\text{sen}(\theta) \\ (z=z) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} z &= x^2+y^2 \\ &= (\rho\cos(\theta)+1)^2+\rho^2\text{sen}^2(\theta) \\ &= \rho^2\cos^2(\theta)+2\rho\cos(\theta)+1+\rho^2\text{sen}^2(\theta) \\ &= \rho^2+2\rho\cos(\theta)+1 \;// \end{aligned}$$

Luego, se propone la parametrización

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \\ \qquad (\rho,\theta)\mapsto\varphi(\rho,\theta)=\begin{pmatrix}\rho\cos(\theta)\\ \rho\,\text{sen}(\theta)\\ \rho^2+2\rho\cos(\theta)+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}\right.$$

con $D=[0,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

Queda propuesto ver que el dominio está bien definido (ッ)

3) Deben llegar a que $\left\|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)\times\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\right\| = \rho\sqrt{5+4\rho^2+8\rho\cos(\theta)}$

4) El campo escalar es $\delta(x,y,z) = \sqrt{1+4z}$

5) $\delta(\varphi(\rho,\theta)) = \sqrt{1+4(\rho^2+2\rho\cos(\theta)+1)}$

6) $$\delta(\varphi)\cdot\left\|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)\times\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\right\| = \sqrt{5+4\rho^2+8\rho\cos(\theta)}\,\rho\sqrt{5+4\rho^2+8\rho\cos(\theta)}$$
$$= \rho(5+4\rho^2+8\rho\cos(\theta))$$

7) Sigue que $\iint_C \delta(x,y,z)\,dS = \iint_D \delta(\varphi(\rho,\theta))\left\|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)\times\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\right\| d\rho\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(5+4\rho^2+8\rho\cos(\theta))\,d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 5\rho+4\rho^3\,d\rho + 8\cos(\theta)\int_0^1 \rho\, d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(5\frac{1}{2}[\rho^2]_0^1 + 4\frac{1}{4}[\rho^4]_0^1 + 8\cos(\theta)\frac{1}{2}[\rho^2]_0^1\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{2}+1+4\cos(\theta)\,d\theta = \frac{7}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + 4\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{7}{2}[\theta]_0^{2\pi} + 4\underbrace{\cancel{[\operatorname{sen}(\theta)]_0^{2\pi}}}_{0} = \frac{7}{2}(2\pi) = 7\pi,$$ calculado lo pedido. $\blacksquare$

Las parametrizaciones conllevan tantos cálculos... pero teniendo un buen método, se hace menos complicado.

Ánimo en la semana!

Si tienen dudas, pueden comentarme :)

Recomendación !!