DESARROLLO AUX 5

CURVAS, INTEGRAL DE TRABAJO Y TEOREMAS ASOCIADOS

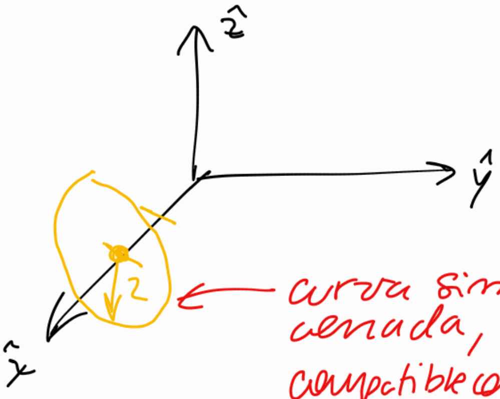
MA2002-1
2024-2

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal

P_1

P1

Ampère: $\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlazada}$



curva simple, cerrada, compatible con $\hat{n}$ de la superficie, es el borde de una superficie

Campo magnético: $\vec{B} = (x^3, y^2 z, y^3 + y z^2)$

Calcular corriente

$\Rightarrow I_{enlazada} = \dfrac{1}{\mu_0} \oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$

Para calcular $\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ se requiere parametrización $\vec{\gamma}$ para visitar el contorno del disco, así:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_{Dom(\vec{\gamma})} \vec{B}(\vec{\gamma}) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\theta}$$

fijo la posición del disco

$$\begin{cases} \vec{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad \theta \mapsto \vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\cos(\theta) \\ 2\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix} \end{cases} \Big\} \text{ recorre el círculo}$$

$*$ $$\frac{d\vec{\gamma}}{d\theta}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\operatorname{sen}(\theta) \\ 2\cos(\theta) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$*$ $$\vec{B}(\vec{\gamma}(\theta)) = \left(8,\ 8\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta),\ 8\cos^3(\theta) + 8\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)\right)$$

$$= 8\left(1,\ \cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta),\ \cos(\theta)\,(\cancel{\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)})^{1}\right)$$

$$= 8\left(1,\ \cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta),\ \cos(\theta)\right)$$

$$* \quad \vec{B}(\vec{\gamma}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\theta}(\theta) = 16\left(0 - \cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)$$

$$= 16\left[\cos^2(\theta)\left(1 - \operatorname{sen}^2(\theta)\right)\right]$$

$$= 16\cos^4(\theta)$$

$$\therefore \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{B}(\vec{\gamma}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\theta}(\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\cos^4(\theta)\,d\theta \quad ; \quad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$= 16\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{16}{2^2}\int_0^{2\pi} 1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\ d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta + 4 \cdot 2\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\,d\theta + 4\int_0^{2\pi} \cos^2(2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\left[\theta\right]_0^{2\pi} + 8\,\frac{1}{2}\cancelto{0}{\left[-\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{2\pi}} + 4\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(4\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= 4\left[2\pi - 0\right] + 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(4\theta)\,d\theta\right)$$

$$= 8\pi + 2\left[\theta\right]_0^{2\pi} + 2\cancelto{0}{\left[-\operatorname{sen}(4\theta)\right]_0^{2\pi}}$$

$$= 12\pi \,//$$

P_2

(P2) $\mathcal{C}$ curva simple orientada $(1,1,1) \longrightarrow (7,2,4)$

Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$

OJO: cuando se da un punto inicial y final y se pide calcular una integral de camino, "dan ganas" de usar la caracterización de campos conservativos.

$$\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \xrightarrow{\vec{F}=\nabla\phi} \displaystyle\int_a^b \nabla\phi(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) \\ \xrightarrow{\vec{F}=-\nabla\phi} \displaystyle\int_a^b (-\nabla\phi(\vec{r}(t)))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \phi(\vec{r}(a)) - \phi(\vec{r}(b)) \end{cases}$$

Γ simple orientada; $\vec{r}(t)$ simple regular

Basado en esto, la idea es ver si este campo es conservativo! (i.e. se puede escribir como gradiente de algún campo escalar).

Sea $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz,\, x^2z,\, x^2y)$

Se busca $\vec{F} = \nabla\phi$,

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2xyz = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ x^2z = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ x^2y = \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases}$$

por inspección:

$\phi(x,y,z) = x^2yz$

lo satisface.

más en general,

$\phi(x,y,z) = x^2yz + \phi_0,\ \phi_0 \in \mathbb{R}$

Luego $\vec{F} = \nabla\phi \Rightarrow \vec{F}$ es conservativo

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz$$

$$= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2 z \\ x^2 y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$= \int_{(1,1,1)}^{(1,2,4)} \nabla\phi \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \phi(1,2,4) - \phi(1,1,1)$$

$$= 1^2 \cdot 2 \cdot 4 - 1^2 \cdot 1 \cdot 1$$

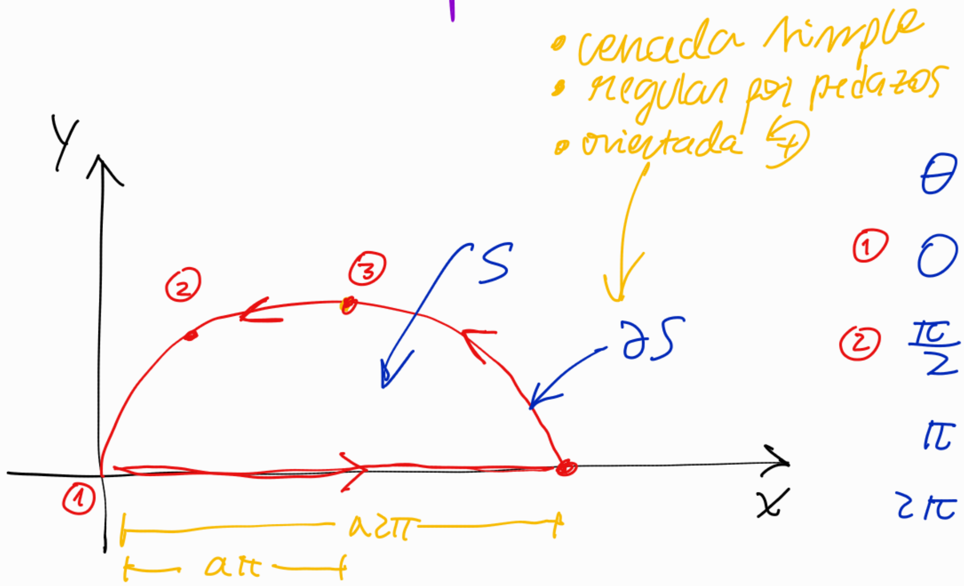
$$= 8 - 1 = 7$$

P_3

P3 Determinar área que delimita el arco de la curva cicloide dada por:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}(\theta)) \quad , a>0$$
$$y = a(1-\cos(\theta)) \quad , a>0$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$OX := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$ ← eje X

Siempre hay que entender la curva!
Se va a evaluar en puntos convenientes.



	θ	x	y
1	0	0	0
2	$\frac{\pi}{2}$	$a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$	a
	π	$a\pi$	$2a$
	2π	$a2\pi$	0

Se puede parametrizar:

$$\begin{cases} \vec{\gamma}: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \qquad \theta \mapsto \vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta - \operatorname{sen}(\theta)) \\ a(1-\cos(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{d\theta}(\theta) = \begin{pmatrix} a(1-\cos(\theta)) \\ a\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

Se quiere calcular el área dentro de esa curva:

$$\iint_S dA = \text{Área}(S)$$

Para hacerlo con superficies, se requeriría parametrizar el interior de la curva. Pero hay que aprovechar que se tiene una parametrización de la curva, y que hay teoremas que lo relacionan a integrales de camino.

Aquí ya se tiene una parametrización para la curva, entonces se tiene una "forma" de visitarlo. Hay un teorema que relaciona campos en el plano y el trabajo sobre el contorno de una región: Green:

Sea $\underbrace{S \subseteq \mathbb{R}^2}_{\text{superficie en el plano}}$ acotada t.q. ∂S es curva $\begin{cases}\text{cerrada simple}\\ \text{regular por pedazos}\\ \text{orientada } (+)\end{cases}$

Sea $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1$

$$\text{Entonces} \quad \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy \overset{\text{Teo. de Green}}{=} \iint_S \overbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}^{\begin{vmatrix} \partial x & \partial y \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}} dx\,dy$$

Entonces la idea será usar un campo adecuado t.q. por Green forme el área. En general sirve:

$$\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix}\partial x & \partial y\\ -y & x\end{vmatrix} = 1-(-1)=2 \quad \iint_S 2\,dxdy = 2\underbrace{\iint_S dxdy}_{\text{Área}(S)}$$

$$\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\in\mathcal{C}^1 \quad \begin{vmatrix}\partial x & \partial y\\ 0 & x\end{vmatrix} = 1 \quad \underbrace{\iint_S dxdy}_{\text{Área}(S)}$$

$$\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\0\end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix}\partial x & \partial y\\ -y & 0\end{vmatrix} = 1 \quad \underbrace{\iint_S dxdy}_{\text{Área}(S)}$$

para usar la parametrización $x=a(\theta-\text{sen}(\theta))$

Usando esto:

En virtud del Teorema de Green:

$$\oint_{\partial S}\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix} = \iint_S \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(0)\,dxdy$$

$$\Leftrightarrow \oint_{\partial S} x\,dy = \iint_S dxdy = \text{Área}(S)$$

Hay que calcularla sobre la región

Se sabe que $x = a(\theta - \operatorname{sen}(\theta))$

$y = a(1-\cos(\theta))$

$\Rightarrow dy = a\operatorname{sen}(\theta)d\theta$

$\Rightarrow xdy = a^2(\theta\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))d\theta$

$$\Rightarrow \oint_{\partial S} xdy = \int_{2\pi}^{0} a^2(\theta\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))\,d\theta$$

$$= a^2\left(\underbrace{\int_{2\pi}^{0}\theta\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_{2\pi}^{0}\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta}_{\mathrm{II}}\right)$$

$$= a^2(2\pi - (-\pi))$$

$$= 3a^2\pi$$

$$\Rightarrow \text{Área}(S) = 3a^2\pi$$

I : $\displaystyle\int_{2\pi}^{0} \theta \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta$; $\quad u = \theta \Rightarrow du = d\theta$

$\quad dv = \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta \Rightarrow v = -\cos(\theta)$

$$= -\left[\theta \cos(\theta)\right]_{2\pi}^{0} - (-1)\int_{2\pi}^{0} \cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \left[2\pi \cdot 1 - 0\right] + \cancelto{0}{\left[-\operatorname{sen}(\theta)\right]_{2\pi}^{0}}$$

$$= 2\pi \;//$$

II $\displaystyle\int_{2\pi}^{0} \operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta$; $\quad \operatorname{sen}^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} d\theta - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} \cos(2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta\right]_{2\pi}^{0} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cancelto{0}{\left[-\operatorname{sen}(2\theta)\right]_{2\pi}^{0}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - 2\pi\right] = -\pi \;//$$

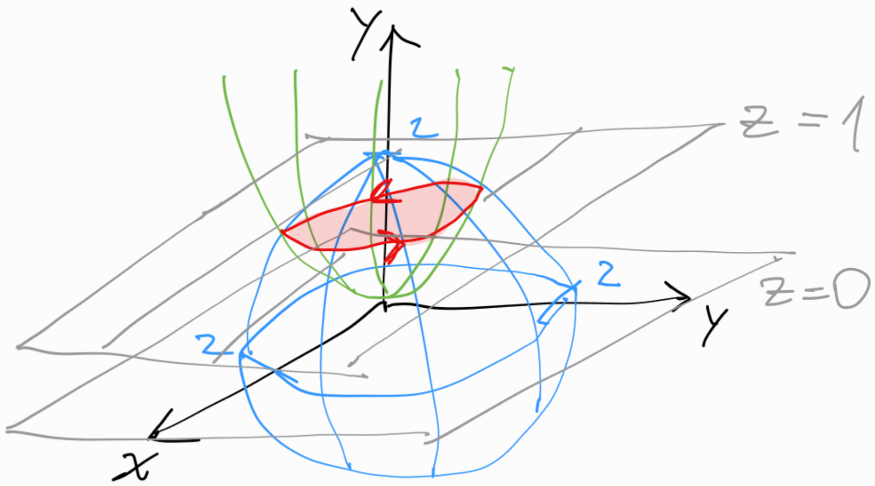
P4

P4 a) $\Pi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4 \wedge x^2+y^2=3z\}$

esfera paraboloide

Calcular $\oint_{\Pi} 2yz^2dx + xz^2dy + 3xyzdz$

Ojo: Aparece integral en camino cerrado, entonces "dan ganas" de usar el Teorema de Stokes. Esto se podría aplicar si la curva fuese el borde de una superficie; visualizando:



Estan en la curva:
$x^2+y^2+z^2=4 \wedge x^2+y^2=3z$

$\Rightarrow 3z+z^2=4$

$\Leftrightarrow z^2+3z-4=0$

$\Leftrightarrow (z+4)(z-1)=0$

$\Rightarrow z=-4,\ z=1$

Ahora se puede usar Teorema de Stokes

$$\oint_{\partial S} \underbrace{\vec{F}}_{\in \mathcal{C}^1} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

∂S: curva

- (borde de superficie)
- cerrada simple
- compatible con $\hat{n}$ de superficie
- regular por pedazos

S:

- (superficie delimitada por curva)
- orientable
- regular por pedazos

$$* \ \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2yz^2 & xz^2 & 3xyz \end{vmatrix}$$

$$= (3xz - 2xz)\hat{\imath} - (3yz - 4yz)\hat{\jmath} + (z^2 - 2z^2)\hat{k}$$

$$= xz\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} - z^2\hat{k} = (xz, yz, -z^2)$$

$$* \ \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

es solo una "escritura". Para que tenga sentido hay que visitar la superficie.

Parametrizando la superficie:

$$\begin{cases} \varphi: D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta) \longmapsto \varphi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\,\text{sen}(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$D = [0,1]\times[0,2\pi]$$

* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\rho\,\text{sen}(\theta) \\ \rho\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\rho\,\text{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \left(\rho\cos^2(\theta)+\rho\,\text{sen}^2(\theta)\right)\hat{k} = \rho\,\hat{k}$

* $\nabla\times\vec{F}(\varphi(\rho,\theta)) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\,\text{sen}(\theta) \\ -1 \end{pmatrix}$

* $\nabla\times\vec{F}(\varphi(\rho,\theta))\cdot\left(\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)\times\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\,\text{sen}(\theta) \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} = -\rho$

Aplicándolo a la integral de interés:

$$\therefore \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho = -[\theta]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2}[\rho^2]_0^1 = -(2\pi)\cdot\frac{1}{2} = -\pi \;//$$

Por Teorema de stokes:

$$\oint_{\Pi} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\pi \quad \blacksquare$$

(P4) d) $\vec{M}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ 4z \\ -6x \end{pmatrix}$

2 al cuadrado, 1 normal → paraboloide en el con eje paralelo a variable grado 1

$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2 \wedge 0 < z < 3\}$

Calcular $\iint_S \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S}$ rotor

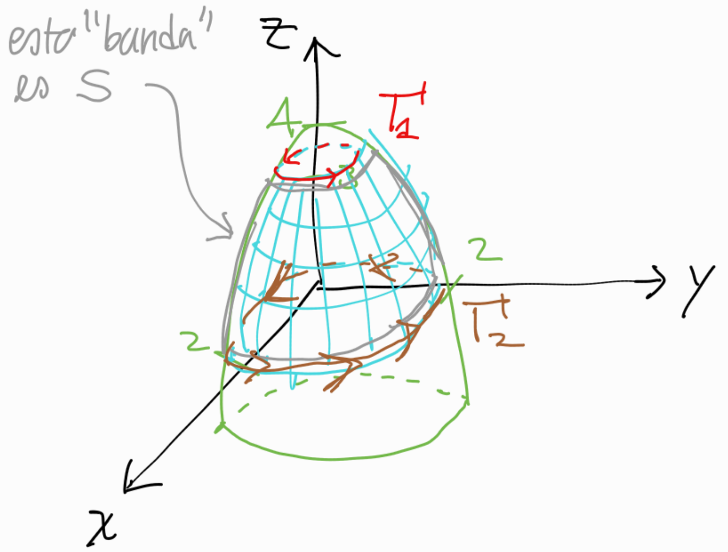
Como piden calcular el flujo del rotor a través de una superficie, se podría usar Stokes y sólo calcular la integral de trabajo del campo en los bordes.

Siempre es útil visualizar la superficie:

restringe altura

Sea $s \in S \Rightarrow s = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $z = 4 - x^2 - y^2 \wedge 0 < z < 3$

paraboloide en el eje z, altura en z=4, abierto a plano XY



$T_1^+ \equiv$ circunferencia superior

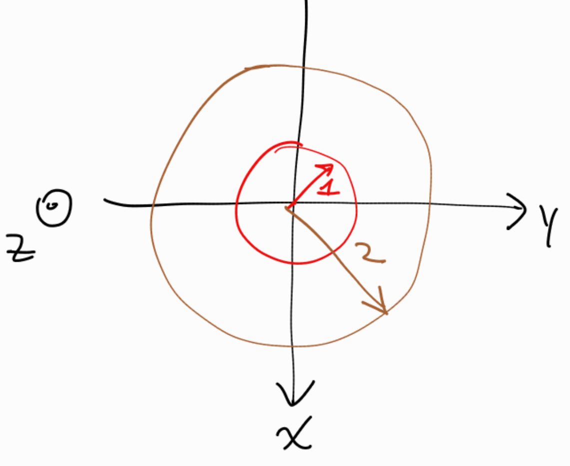
$\hookrightarrow z = 3 \Rightarrow 3 = 4 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$T_2^+ \equiv$ circunferencia inferior

$\hookrightarrow z = 0 \Rightarrow 0 = 4 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$



Notar que S es una superficie acotada, regular y orientable (pues es sección de un paraboloide.

Además notar que $T = T_1 \cup T_2$ es una curva simple cerrada, regular por pedazos y orientable (pues T_1, T_2 lo son ya que son circunferencias).

También notar que $\vec{M} \in \mathcal{C}^1$ (por álgebra y composición de funciones de clase $\mathcal{C}^1$ —polinomios—).

En virtud del Teorema de Stokes:

$$\iint_S \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_{T_1} \vec{M} \cdot d\vec{l} + \oint_{T_2} \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

El borde ∂S son las curvas T_1, T_2

Ahora, hay que calcular el valor de cada una de las integrales de camino. Usando:

$$\begin{cases} \gamma_1 : [0,2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \theta \mapsto \gamma_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

visita borde de círculo de radio 1 que se forma en el plano $z=3$

$$\begin{cases} \gamma_2 : [0,2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \theta \mapsto \gamma_2(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 2\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

visita borde de círculo de radio 2 que se forma en el plano $z=0$

Se obtiene que $\displaystyle\oint_{T_1} \vec{M} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma_1(D_1)} \vec{M}(\gamma_1(\theta)) \cdot \left(\frac{d\gamma_1}{d\theta}\right) d\theta = -3\pi$

y $\displaystyle\oint_{T_2} \vec{M} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma_2(D_2)} \vec{M}(\gamma_2(\theta)) \cdot \left(\frac{d\gamma_2}{d\theta}\right) d\theta = 12\pi$.

Hay que desarrollar y calcular $\vec{M}(\gamma_i)$, $\left(\frac{d\gamma_i}{d\theta}\right)$, $\vec{M}(\gamma_i) \cdot \left(\frac{d\gamma_i}{d\theta}\right)$, (queda propuesto ☺)

Luego $\displaystyle\iint_S \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S} = 9\pi$, calculando así lo pedido. $\blacksquare$

P5

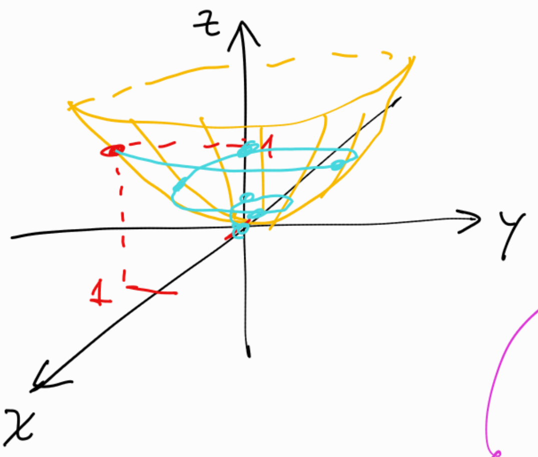
P5 $\mathcal{N}$ ≡ "curva" ← descrita por ρ, θ porque visita la sup., pero va cambiando con el tiempo

$x^2+y^2=z \leftarrow \rho, \theta \leftarrow \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\rho \wedge \rho(0)=1 \wedge \rho'(0)=-1$

P5 a) Bosquejar paraboloide donde está $\mathcal{N}$ → trayectoria EDO

Indicar partida → punto inicial ó condiciones iniciales

Para bosquejarlo, se usa que los paraboloides están con eje en el eje de la variable de grado 1 y se extienden paralelo al plano de las variables al cuadrado, abriéndose hacia el lado positivo si ambas variables al cuadrado tienen signo +.



$(0)=1 \Rightarrow \theta(0)=0$ bajo la idea de que en el primer instante

Usando el nuevo sistema

$x=\rho\cos(\theta) \Rightarrow x_0 = 1\cdot\cos(0)=1$

$y=\rho \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow y_0 = 1\cdot\operatorname{sen}(0)=0$

$x^2+y^2=z^2\big|_{\text{inicio}} \Rightarrow z_0=1$

Luego $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,1)$ es el punto de partida!

Ahora, sobre la trayectoria. Se sabe que si $P\in\mathcal{N}$ i.e. un punto está en la curva, sus variables (ρ,θ) en cilíndricas satisfacen:

$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\rho \Leftrightarrow \rho''=\rho \Leftrightarrow \rho''-\rho=0 \rightarrow \beta^2-1=0 \Leftrightarrow \beta=\pm 1$

EDO a coef. constantes → polinomio caract.

$\rightarrow \{e^{\theta}, e^{-\theta}\}$ base de $\mathcal{H}$ ← soluciones a sist. homogéneo $\rightarrow \rho(\theta)=Ae^{\theta}+Be^{-\theta}, A,B\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \rho'(\theta)=Ae^{\theta}-Be^{-\theta}, A,B\in\mathbb{R}$

Pero $\left.\begin{array}{l}\rho(0)=1 \Rightarrow 1=A+B \\ \rho'(0)=-1 \Rightarrow -1=A-B\end{array}\right\} \begin{array}{l}0=2A \Rightarrow \boxed{A=0} \\ \Rightarrow \boxed{B=1}\end{array}$

$\therefore \boxed{\rho(\theta)=e^{-\theta}}$; $\theta=\theta(t)$

P5 b) Encontrar parametrización de $\mathcal{N}$

En la parte anterior se vio que los puntos de la curva satisfacen $\rho(\theta) = e^{-\theta}$, y como la curva está inmersa en el paraboloide, es "como" si tuviesen ese "radio" en cada punto $\rightsquigarrow \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y = \rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$

Usando eso en el paraboloide: $x^2+y^2 = z$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = z \Leftrightarrow (e^{-\theta})^2 = z$$
$$\Leftrightarrow e^{-2\theta} = z$$

Por lo anterior, se quisiera describir a los puntos $(x,y,z) \in \mathcal{N}$ de forma que:

$$\begin{cases} \gamma : [0,2\pi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad \theta \mapsto \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-\theta}\cos(\theta) \\ e^{-\theta}\operatorname{sen}(\theta) \\ e^{-2\theta} \end{pmatrix} \end{cases}$$

parametriza la curva $\blacksquare$

P5 c) Determinar potencial explícito de

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z(1+xz)e^{xz+y} \\ xze^{xz+y} \\ x(1+xz)e^{xz+y} \end{pmatrix}$$

En el fondo, se busca $\underbrace{\phi}_{\text{escalar}}: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}^1 : \vec{F} = \nabla\phi$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z(1+xz)e^{xz+y} \\ xze^{xz+y} \\ x(1+xz)e^{xz+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \Bigg\} \text{ecuaciones}$$

Ahora hay que despejar c/r a cada variable. Al integrar, aparecen constantes c/r al resto.

$$(2) :\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = xze^{xz+y}$$

escribir dependencias de forma más explícita

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = \underbrace{xze^{xz}}_{f(x,z)}\underbrace{e^{y}}_{f(y)} \quad \Big/ \int dy$$

→ integrar c/r a y, lo que no depende de y se ve como "constante"

$$\Rightarrow \phi = \int xze^{xz}e^{y}\,dy$$

xze^{xz} cte. c/r a y

$$= xze^{xz}\int e^{y}\,dy$$

primitiva de e^y es e^y y aparecen constantes c/r a y (i.e. depende del resto a lo más)

$$= xze^{xz}e^{y} + \xi_1(x,z)$$

prop. exponencial

$$(*) \Rightarrow \boxed{\phi = xze^{xz+y} + \xi_1(x,z)}$$

Ahora se tiene una forma de ϕ. La idea es calcular otra derivada parcial de la que no se despejó para igualarlos (pues debe satisfacer igualdad) y deducir.

Por ★ $\Rightarrow \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = z e^{xz+y} + xz^2 e^{xz+y} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}(x,z)$

derivadas parciales

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = z(1+xz)e^{xz+y} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x}(x,z) \quad (1)^*$$

Pero se sabe que de (1): $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = z(1+xz)e^{xz+y}$

Así, $\underbrace{(1)^* = (1)}_{\text{debe ser cierto (escrituras de } \frac{\partial \phi}{\partial x})} \Rightarrow \cancel{z(1+xz)e^{xz+y}} = \cancel{z(1+xz)e^{xz+y}} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}(x,z)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}(x,z) = 0 \rightarrow$ no depende de x si al derivarla es cero (su variación c/r a x es nula)

$\Rightarrow \xi(x,z) = \xi(z)$

↳ o sea cte. depende a lo más de z

Ahora, en la caracterización ★: $\phi = xze^{xz+y} + \xi(z)$.

Ahora se quisiera comparar c/r a z. Por la construcción y (3), se tiene $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = x(1+xz)e^{xz+y}$.

Por ★ $\Rightarrow \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = xe^{xz+y} + x^2 z e^{xz+y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}(z)$

$$= x(1+xz)e^{xz+y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}(z). \quad (3)^*$$

Así $\underbrace{(3)^* = (3)}_{\text{debe ser cierta (escrituras de } \frac{\partial \phi}{\partial z})} \Rightarrow \cancel{x(1+xz)e^{xz+y}} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}(z) = \cancel{x(1+xz)e^{xz+y}}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \xi}{\partial z}(z) = 0 \rightarrow$ variación de $\xi(z)$ c/r a z es nula i.e. $\xi(z)$ es radical no depende de z! es una constante real.

$\Rightarrow \xi = \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$

porque se puede escribir como grad. de potencial

Finalmente, en ★: $\phi = xze^{xz+y} + \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$

es un potencial. Luego $\vec{T}$ es conservativa bajo la familia de potenciales $\{\phi_0 + \mu \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ t.q. $\phi_0 = xze^{xz+y}$

Tomando $\mu = 0$, se tiene que $\phi = xze^{xz+y}$ y $\nabla \phi = \vec{T}$. ▣

↑ ejemplo. Cualquier $\mu \in \mathbb{R}$ sirve!

P_5 d) Γ es recorrida por partícula sometida a una

Propuesto // fuerza dada por campo $\vec{T}$.

Calcular $\int_{\Gamma'} \vec{T} \cdot d\vec{\ell}$

Γ' que es $z=1 \to z=4\pi$ en Γ

Idea: Como $\vec{T}$ es conservativo, su integral de trabajo solo depende de los puntos iniciales y finales... (mediante el potencial asociado). 😊

Así son las integrales de camino!

En la medida que hagan ejercicios verán que las parametrizaciones siempre siguen la misma idea

Mucho ánimo en su estudio!

Dudas por correo, al foro o cuando nos veamos.

para estudiar tranqui