Auxiliar 13

Cálculo de transformada de Fourier y aplicaciones

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal
Fecha: 20 de noviembre de 2024

P1. [Calentando motores]
Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo grado y con amortiguador f integrable:

$$\varphi''(x) - \varphi(x) = f(x),\ x \in (-\infty, +\infty)$$

Resuélvala utilizando algún método no aprendido en MA2601: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

P2. [Resolviendo]
Un pulso ϕ que depende de la posición x tiene su comportamiento determinado por la ecuación:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + 2\frac{d\phi}{dx}(x) + \phi(x) = H(x)e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

donde H es la función escalón de Heaviside, y ϕ es integrable según las observaciones. Determine ϕ.

P3. [Recuperar]
Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable tal que la asignación $x \mapsto xf(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que $\mathcal{F}\left(xf(x)\right)(s) = i\dfrac{d}{ds}\Big(\mathcal{F}\left(f(x)\right)(s)\Big)$, donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier.

b) Calcule la transformada de Fourier de $x^2 e^{\frac{-1}{2}x^2}$.

P4. [Transformando]
Sea g una función que satisface $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)e^{-s^2}$. Demuestre que se cumple que:

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{1}{4}(x-y)^2}\, dy.$$

Le podría ser de utilidad que $\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(s) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}s^2}$.

P5. [Calcular]
Considere $a > 0$. Demuestre que se tiene la identidad:

$$\mathcal{F}\left(\frac{a^3 - ax^2}{(a^2+x^2)^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a|s|e^{-a|s|}.$$

P6. [Calcular]

Determine la transformada de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, |x| \leq 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$.

Deduzca que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = -\frac{3\pi}{16}$.