Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
6 de septiembre de 2024

Auxiliar Extra

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

[Criterio de Continuidad]
$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall K \subset \Omega$ compacto, $\exists C(K) > 0, n(K) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C(K)\|\varphi\|_{N(K)}, \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega), \sup(\varphi) \subset K.$$

[Orden]
Diremos que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es de orden $N \in \mathbb{N}$ si este es el menor natural tal que:

$$\forall K \subset \Omega \text{ compacto, } \exists C(K) > 0, \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C(K)\|\varphi\|_N, \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega), \sup(\varphi) \subset K.$$

Si esto no se cumple se dice que T es de orden infinito.

P1. Determine el orden de las siguientes distribuciones

a) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, la delta dirac δ_{x_0}.

b) Dado $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

c) Sea el operador valor principal definido por

$$\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

d) Sea $\Omega = (0, \infty)$. Definimos Λ el funcional

$$\langle \Lambda, \varphi\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} (\partial^m \varphi)(1/m)$$

P2. *a)* Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tiene orden finito.

b) Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tiene soporte $\{x_0\} \subset \mathbb{R}^d$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, $(c_\alpha)_{(\alpha\in\mathbb{N})} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$T = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

c) Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $\sup(T) = K$ compacto en Ω, entonces para todo $V \subset \Omega$ abierto, tal que $K \subset V$, V acotado, existe $N(V) \in \mathbb{N}$ y funciones continuas $(f_\alpha)_{(\alpha\in\mathbb{N})} \subset \mathbb{R}^d$ con soporte en V tal que

$$T = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha \partial^\alpha f_\alpha$$