Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
12 de septiembre de 2024

Auxiliar 4

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. El objetivo de este problema es demostrar que para $s > d/2$ el espacio $H^s(\mathbb{R}^d)$ es un álgebra de Banach con respecto al producto de funciones. Para ello:

a) Demuestre que para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ se cumple:

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 4^{s/2} \left((1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2} \right).$$

b) Verifique que si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ y $s > d/2$ entonces $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y además

$$\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{C} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

c) Verifique que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

d) Demuestre que $uv \in H^s(\mathbb{R}^d)$ y además existe $C > 0$ tal que:

$$\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

P2. Probar que si $s > d/2 + k$, entonces

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \{u \in C^k(\mathbb{R}^d) \text{ tal que } u \to 0 \text{ cuando } |x| \to \infty\}.$$

Para ello, verifique primero que si $s > d/2$, $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^d)$ y nula al infinito.

P3. **[Calor en $\mathcal{S}'$]** Sea $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$. Para $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, consideraremos la siguiente ecuación del calor en $\mathcal{S}'$

$$\text{(H)} \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(t=0,x) = \partial_{x_1} \delta_0(x). \end{cases}$$

a) Suponga que $u(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ para cada $t > 0$ y $\partial_t u(t)$ (como $\lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$) existe. Muestre que $\partial_t u(t)$ está bien definida en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y que $\mathcal{F}(\partial_t u)(t,\xi) = \partial_t \hat{u}(t,\xi)$, donde $\hat{u}(t,\xi) := \mathcal{F}u(t,\xi)$.

b) Encuentre $u(t)$ y verifique que efectivamente no solo está en $\mathcal{S}'$ para cada $t > 0$, sino que también es función, y está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Recuerdos

- **Transformada de Fourier y convoluciones**

  Se define la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y su respectiva anti transformada $\mathcal{F}^*$ en $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ como:

$$\mathcal{F}f(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi kx} f(x)dx \qquad \mathcal{F}^* f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i2\pi kx} f(k)dk$$

  Además se define como operador de $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ como:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Proposición.
Si φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposición.
Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $(\varphi *)$ extiende a una operación continua de $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}'$ definida por:

$$\langle \varphi * T, \psi \rangle := \langle T, \varphi * \psi \rangle$$

además, cumple:

1. $\mathcal{F}(\varphi * T) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(T)$.
2. $\partial^\alpha(\varphi * T) = \partial^\alpha \varphi * T = \varphi * \partial^\alpha T$.

- **Espacios de Sobolev**

Definición. Se define, para $s > 0$,

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + |k|^2)^{s/2} \hat{f}(k) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

Con la norma:

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(k)|^2 (1 + |k|^2)^s dk$$