Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
14 de Octubre de 2024

Auxiliar 8

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. Problema de Dirichlet en el disco unitario. El objetivo de esta pregunta es resolver el siguiente problema:

$$(PD)\begin{cases}\Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = f \text{ en } \partial\Omega\end{cases}$$

con $\Omega := D(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Para esto procedemos como sigue.

a) Exprese u en coordenadas polares (r,θ) y calcule su Laplaciano en estas variables.

b) Suponga que $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias para R y Θ.

c) Escriba condiciones de compatibilidad y resuelva las ecuaciones anteriores.

d) Determine la solucion del problema.

e) Demuestre la formula de Poisson en dimensión 2:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(\eta)\frac{1-|\xi|^2}{|\eta-\xi|^2}dS(\eta), \quad \forall \eta \in \Omega.$$

P2. Sea un dominio acotado en $\mathbb{R}^d$ y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ una función armónica en Ω. Demuestre que:

$$\sup_{x,y\in\Omega}\frac{u(x)-u(y)}{x-y} =: M = M_1 := \sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega}\frac{u(x)u(y)}{x-y}$$ $u(x) - u(y)$

Con esta igualdad demuestre la siguiente cota para el gradiente de u

$$M_0 := \sup_{x\in\Omega} Du \leq M$$

Finalmente, demuestre que si es convexa, entonces $M_0 = M$.

P3. (Como usar resultados de la Ecuación de Calor)

a) Escriba una formula explicita para las soluciones de

$$\begin{cases}u_t - \Delta u + cu = f \text{ en } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ u = g \text{ en } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}\end{cases}$$

b) Dada la función $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, con $g(0) = 0$, derive la siguiente formula

$$u(t,x) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}g(s)ds$$

para las soluciones del problema

$$\begin{cases}u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = g \text{ en } \{x=0\}\times[0,\infty)\}\end{cases}$$

Hint: Considere la función $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ y extienda v para $x < 0$ de forma impar.

P1] $r\cos\theta = x$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$r\sin\theta = y$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x = \cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \text{''} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ $\quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$ $\quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= u_r \cos\theta - \frac{u_\theta \sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\qquad \right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\qquad \right)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$= \left(u_{rr}\cos\theta - \frac{u_{\theta r}\sin\theta}{r} + \frac{u_\theta \sin\theta}{r^2} \right)\cos\theta$$

$$- \left(u_{\theta r}\cos\theta - u_r \sin\theta - \frac{u_{\theta\theta}\sin\theta}{r} - \frac{u_\theta \cos\theta}{r} \right)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$= u_{rr}\cos^2\theta + u_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2u_{\theta r}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + 2u_\theta\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}$$

$$+ u_r \frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\qquad \right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\qquad \right)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$= \left(u_{rr} \sin\theta + u_{\theta r} \frac{\cos\theta}{r} - u_\theta \frac{\cos\theta}{r^2} \right) \sin\theta$$

$$+ \left(u_{\theta r} \sin\theta + u_r \cos\theta + u_{\theta\theta} \frac{\cos\theta}{r} - \frac{u_\theta \sin\theta}{r} \right) \frac{\cos\theta}{r}$$

$$= u_{rr} \sin^2\theta + u_{\theta\theta} \frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{2 u_{\theta r} \cos\theta \sin\theta}{r}$$

$$- \frac{2 u_\theta \cos\theta \sin\theta}{r^2} + u_r \frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}}$$

b) Metodo de <u>Separación de Variables</u>

Ejemplos Cap 16 de CAA

Suponer Solución $u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow R''\Theta + \frac{R'\Theta}{r} + \frac{R\Theta''}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{R''r^2 + R'r}{R}}_{f(r)} = \underbrace{-\frac{\Theta''}{\Theta}}_{g(\theta)}$$

La unica forma que sean iguales

$$\Rightarrow f(r) = g(\theta) = cte$$

$$\Rightarrow R''r^2 + R'r = aR \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

$$-\Theta'' = a\Theta$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} R''r^2 + R'r - aR = 0 \\ \Theta'' + a\Theta = 0 \end{array}\right\} a \in \mathbb{R}$$

c) Como Θ es el Angulo

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{array}\right\} \text{Compatibilidad}$$

Si $a < 0$

$$\Theta'' + a\Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = Ae^{\sqrt{-a}\,\theta} + Be^{-\sqrt{-a}\,\theta}$$

$$\Theta'(\theta) = \sqrt{-a}\left(Ae^{\sqrt{-a}\,\theta} - Be^{-\sqrt{-a}\,\theta}\right)$$

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \Rightarrow A + B = \left(Ae^{\sqrt{-a}\,2\pi} + Be^{\sqrt{-a}\,2\pi}\right)$$

$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \Rightarrow A - B = \left(Ae^{\sqrt{-a}\,2\pi} - Be^{\sqrt{-a}\,2\pi}\right)$$

$\Rightarrow$

$$A = A e^{\sqrt{a}\,2\pi} \Rightarrow a = 0 \quad \times$$

No puede ser $a<0$

$\boxed{a=0} \Rightarrow \vartheta'' = 0 \Rightarrow \vartheta(\theta) = A + B\theta$

$\vartheta(0) = \vartheta(2\pi) \Rightarrow \vartheta(\theta) \equiv A$

$\boxed{a>0} \Rightarrow \vartheta(\theta) = A\cos(\sqrt{a}\,\theta) + B\sin(\sqrt{a}\,\theta)$

$$\vartheta'(\theta) = \sqrt{a}\left(-A\sin(\sqrt{a}\,\theta) + B\cos(\sqrt{a}\,\theta)\right)$$

$\vartheta(0) = \vartheta(2\pi) \Rightarrow A = A\cos(\sqrt{a}\,2\pi) + B\sin(\sqrt{a}\,2\pi)$

$\vartheta'(0) = \vartheta'(2\pi) \Rightarrow B = -A\sin(\sqrt{a}\,2\pi) + B\cos(\sqrt{a}\,2\pi)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\cos(\sqrt{a}\,2\pi) & -\sin(\sqrt{a}\,2\pi) \\ \sin(\sqrt{a}\,2\pi) & 1-\cos(\sqrt{a}\,2\pi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para tener infinitas soluciones $\det([\ ])=0$

$$\Rightarrow \left(1-\cos(\sqrt{a}\,2\pi)\right)^2 + \sin^2(\sqrt{a}\,2\pi) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2\cos(\sqrt{a}\,2\pi) + \cos^2(\sqrt{a}\,2\pi) + \sin^2(\sqrt{a}\,2\pi) = 0$$

$$\cos(\sqrt{a}\,2\pi) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = k \in \mathbb{N} \qquad \{1, 2, \dots\}$$

En resumen

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$$

$$\theta_k(\sigma) = A_k \cos(k\sigma) + B_k \sin(k\sigma)$$

Son soluciones. Sea $K > 0$

$$R'' r^2 + R' r - K^2 R = 0$$

Tomando $R(r) = C r^m$

$$\Rightarrow \left(m(m-1) + m - K^2\right) r^m = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = K^2 \Rightarrow m = \pm K$$

$$\Rightarrow R_K(r) = C_K r^K + D_K r^{-K}$$

Usando $\lim_{r \to 0} |u(r,\theta)| < \infty$

$$\Rightarrow D_K = 0 \Rightarrow R_K(r) = C_K r^K$$

Para $K=0 \Rightarrow R'' r^2 + R' r = 0 \Rightarrow R'' r + R' = 0$

$$\Rightarrow (R' r)' = 0 \Rightarrow R' = \frac{D}{r} \Rightarrow R = C + D \ln(r)$$

Por lo mismo $\Rightarrow R_0(r) = C_0$

$$\Rightarrow U_K(r,\theta) = C_K r^K \left(A_K \cos(K\theta) + B_K \sin(K\theta)\right)$$

es solución

Por superposición es solución la suma

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^K \left(\tilde{A}_K \cos(k\theta) + \tilde{B}_k \sin(k\theta)\right)$$

$$+ \tilde{A}_0/2$$

d) Usando $u(1,\theta) = f$

Como $f \in C(\partial D(0,1)) \cong C(S)$

Se puede definir como $f \in C([0,2\pi])$

y continua en $[0, 2\pi]$ $\Rightarrow$ $\boxed{C^1([0,2\pi])}$

$$\Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\theta) + D_k \sin(k\theta)$$

$$+ \frac{C_0}{2}$$

Con $$C_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos(ky)\,dy$$

$$D_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sin(ky)\,dy$$

Por unicidad

Como $$u(1,\theta) = \tilde{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k \cos(k\theta) + \bar{B}_k \sin(k\theta)$$

$$\Rightarrow \bar{A}_i = C_i \, , \, \bar{B}_i = D_i$$

e) $$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,dy +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left[\cos(ky)\cos(k\theta) + \sin(ky)\sin(k\theta)\right] dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\left[\cos(ky)\cos(k\theta) + \sin(ky)\sin(k\theta)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k(y-\theta))\right] dy$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\alpha) r^k = \sum_{k=1}^{\infty} (re^{i\alpha})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (re^{-i\alpha})^k = \frac{1}{1-re^{i\alpha}} + \frac{1}{1-re^{-i\alpha}}$$

$$-2$$

$$= \frac{2 - r(e^{ix} + e^{-ix})}{1 - r(e^{ix} + e^{-ix}) + r^2} - 2$$

$$= \frac{2 - 2r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2} - 2$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k(y-\theta)) = \frac{2 - 2r\cancel{\cos}(y-\theta) - 1 - r^2 + 2r\cancel{\cos}(y-\theta)}{1 - 2r\cos(y-\theta) + r^2}$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(y-\theta) + r^2}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(y)\,(1 - r^2)}{1 - 2r\cos(y-\theta) + r^2}\, dy$$

<u>Cambio de variables</u>

$$\xi = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \eta = (\cos y, \sin y)$$

$$\Rightarrow |\xi - \eta| = 1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{f(\eta)(1 - |\xi|^2)}{|\xi - \eta|} d\eta}$$

$\boxed{P2}$ Como u continua y C^2

$$\Rightarrow \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \text{ es } C^1$$

$$\Rightarrow \sup_{x,y \in \Omega} \left| \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \right| = \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \left| \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \right|$$

$\Rightarrow M \geq M_1$

Sea $x_0, y_0 \in \Omega$, se define $h = y_0 - x_0$

Se define $\Omega_h := \{ x \in \Omega \mid x+h \in \Omega \}$

$\Rightarrow x_0 \in \Omega_h$

Sea $v(x) = u(x) - u(x+h)$

$\Rightarrow \Delta v = 0$

Por lo tanto por Principio del máximo

$$\sup_{x \in \Omega_h} |v(x)| = \sup_{x \in \partial\Omega_h} |v(x)|$$

Claim $x \in \partial\Omega$ o

Sea $x \in \partial\Omega_h$ $x+h \in \partial\Omega$

Proof Si: $x \in \partial\Omega_h$ ✓

Si: $x \notin \partial\Omega$, Si: $x+h \notin \partial\Omega$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall w \in B(x+h, \varepsilon)$

$x+h+w \in \Omega$

$\Rightarrow (x+w)+h \in \Omega$

$\Rightarrow x \notin \partial\Omega_h \Rightarrow x+h \in \partial\Omega$

Si: $x \in \partial\Omega_h \Rightarrow$ $v(x) = \underset{\text{Alg con}}{u(x)} - \underset{\in \partial\Omega}{u(x+h)}$

$\Rightarrow \dfrac{|v(x)|}{|h|} \overset{\text{def}}{\leq} M_1 \Rightarrow \boxed{|v(x)| \leq M_1 |h| \quad \circledast}$

$$\left|\frac{v(x_0)-u(y_0)}{x_0-y_0}\right| = \frac{|v(x_0)|}{|h|} \le \sup_{x\in\Omega_h} \frac{|v(x)|}{h}$$

$$\le \sup_{x\in\partial\Omega_h} \frac{|v(x)|}{h}$$

$$\overset{\circledast}{\le} M_1$$

Como $x_0, y_0 \in \Omega$ Arbitrario, Tomando supremo

$$\Rightarrow \quad M \le M_1 \Rightarrow \boxed{M = M_1}$$

---

b) $$|Du(x)| = \lim_{r\to 0^+} \sup_{|h|=r} \frac{|u(x+h)-u(x)|}{r} \overset{\text{def}}{\le} M$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\Omega} |Du(x)| \le M \quad (M_0 \le M)$$

Si Ω convexo

$$[x,y] = \{ tx + (1-t)y \quad t \in [0,1] \} \subseteq \Omega$$

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx + (1-t)y)\, dt$$

$$= \int_0^1 Du(tx + (1-t)y)(x-y)\, dt$$

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \int_0^1 M_0 \, |x-y| \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} \leq M_0$$

$$\Rightarrow M \leq M_0 \Rightarrow \boxed{M = M_0}$$

P3 a) Basta con hacer un cambio

$$v(t,x) = e^{ct} u(t,x)$$

$$\Rightarrow v_t = c\, e^{ct} u + e^{ct} u_t$$

$$\Delta v = e^{ct} \Delta u$$

$$\Rightarrow \quad v_t - \Delta v = e^{ct} f \qquad \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$$

$$v = g \qquad \mathbb{R}^d \times \{t=0\}$$

Usando la solución con $K(x,y,t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)\, g(y)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t K(x,y,t-s)\, e^{cs} f(y,s)\, ds\, dy$$

$u(t,x) = e^{-ct} v(t,x)$

b) $v_t - v_{xx} = g'$ en $\mathbb{R}_+ \times [0,\infty)$

$v = 0$ en $\mathbb{R}_+ \times \{t=0\}$

$v = 0$ en $\{x=0\} \times [0,\infty)$

La expansión es usar $v(x,t) = g(t) - u(-x,t)$

si $x < 0$

$\Rightarrow v_t - v_{xx} = -g'(t)$ en $\mathbb{R}_- \times [0,\infty)$

" "

" "

$$\Rightarrow v = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)\cdot 0\,dy + \int_0^t \int_0^{\infty} K(x,y,t-s)\, g'(s)\,dy\,ds$$

$$-\int_0^t \int_{-\infty}^{0} K(x,y,t-s)\, g'(s)\, dy\,ds$$

$$= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t-s)\, g'(s)\,dy\,ds$$

$$-\int_0^t \int_{-\infty}^{0} K(x,y,t-s)\left[2\ g'(s)\ \right]dy\,ds$$

$$= \int_0^t g'(s)\,ds - 2\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{0} K(x,y,t-s)\, g'(s)\,dy\,ds\right]$$

$$= g(t) - \cancel{g(0)}^{0} - 2\int_0^t \int_{-\infty}^{0} (4\pi(t-s))^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}\ g'(s)\,dy\,ds$$

$z = \frac{x-y}{\sqrt{4(t-s)}}$

$$= g(t) - 2\int_0^t \int_{\frac{x}{\sqrt{4(t-s)}}}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}\,dz\ g'(s)\,ds$$

$$= g(t) - 2\int_0^t h(s)\, g'(s)\, ds$$

$$\overset{\text{Ipp}}{=} g(t) - 2\left[h(t)\, g(t) - h(0)\, \cancel{g(0)}^{\,0}\right]$$

$$+ 2\int_0^t h'(s)\, g(s)\, ds$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Para } \; x>0, \quad h(t) = \int_\infty^\infty \text{Algo} = 0 \\[1em] h'(s) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{4}} \cdot \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-1) \\[1em] \quad = \dfrac{x}{2\sqrt{4\pi}\,(t-s)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} \end{array}}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = g(t) + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}\,(t-s)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\, g(s)\, ds$$

Usando $u = v - g$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi}\,(t-s)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\, g(s)\, ds \quad *$$