SEMINARIO DE RECURRENCIA EN TEORÍA ERGÓDICA

En la década de 1970, Furstenberg desarrolló su *teorema de correspondencia* que vincula la teoría de números y la combinatoria con la teoría ergódica. Usando esta correspondencia, Furstenberg obtuvo una demostración del famoso teorema de Szemerédi sobre las progresiones aritméticas. Desde entonces, se han obtenido numerosos resultados en combinatoria y teoría de números utilizando esta correspondencia, algunos de los cuales aún no tienen demostraciones que no involucren la teoría ergódica. El concepto ergódico fundamental es aquel de la recurrencia.

En este curso, se presentarán los principios básicos de la teoría ergódica, el teorema de correspendencia y sus varias aplicaciones a la teoría de números. Se estudiará el concepto de recurrencia, tanto en el contexto topológico como en el medible. Una parte importante será dedicada a la demostración del teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg. Hacia el final, veremos tópicos avanzados que son investigados activamente en la actualidad.

Programa tentativo

1) Introducción y generalidades (1,5 semana). Conceptos básicos en teoría ergódica; Teorema de recurrencia de Poincaré; Teorema de recurrencia de Khintchine; Conjuntos de recurrencia; Teorema de Furstenberg-Sárközy.
2) Herramientas ergódicas para la teoría de números (1 semana). Principio de correspondencia de Furstenberg; Lemma, van der Corput; Versión ergódica del teorema de Szemerédi y generalizaciones.
3) Comentarios en recurrencia optimal (1 semana). Teorema de descomposición de Bergelson-Host-Kra y consecuencias; Recurrencia optimal para polinomios y otras secuencias; Transformaciones que conmutan; Relaciones con "diferencias populares" en combinatoria; Preguntas abiertas.
4) Recurrencia topológica (1,5 semanas). Puntos recurrentes; extensiones, conjuntos sindéticos por trozos; Teorema de recurrencia múltiple topológico y aplicaciones (Teorema de Van der Waerden).
5) Teorema de Recurrencia múltiple de Furstenberg (4 semanas). funciones propias, funciones compactas, funciones débilmente mezcladoras. Teorema de descomposición de Jacobs-de Leeuw-Glicksberg, Teorema de Roth ergódico. Extensiones compactas y débilmente mezcladoras.
6) Tópicos avanzados recientes (2 semanas)
   - Configuraciones infinitas Teorema infinito Ramsey; Teorema de Hindman; Conjetura de Erdős sobre conjuntos suma infinitos. Teorema de Moreira-Kra-Richter-Robertson; Preguntas abiertas.
   - Configuraciones polinomiales. Tríos pitagóricos; Acciones multiplicativas; Otras configuraciones polinomiales; Preguntas abiertas.

Actividades evaluativas. Las actividades incluyen tareas individuales, y una presentación e informe al final del curso sobre un tópico específico (artículo o capítulo de texto). Además se considerará la asistencia a clases y a las exposiciones de de compañeros.

La nota final se calcula como:

$$NF = 0{,}15 \cdot NT_1 + 0{,}15 \cdot NT_2 + 0{,}15 \cdot NT_3 + 0{,}075 \cdot AC + 0{,}075 \cdot AP + 0{,}15 \cdot P + 0{,}25 \cdot I.$$

Arriba, NT es nota de tarea, AP es nota de asistencia a clases, AP asistencia a presentaciones, P es la nota de la presentación, e I es la nota del informe. La nota de asistencias se calcula de manera lineal.