



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE MEDICINA
UNIDAD DE BIOMATEMÁTICA
Primer Semestre 2021

CB1006-1 - Matemáticas
Preguntas de Desarrollo del Certámen 2

Profesores: José Aburto
Caroll Cuellar
Esteban Gutiérrez
Diego Montengro

1. Considere la función

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}.$$

Encuentre, de existir en cada caso:

- (a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (b) Puntos de inflexión.

Solución:

- (a) Primero veamos que f es una división de polinomios, de donde podemos calcular su derivada por medio de la regla de la división

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1)^3 - (x+1)((x-1)^3)'}{(x-1)^6},$$

y como $(x+1)' = 1$ y $((x-1)^3)' = 3(x-1)^2$ sigue que

$$f'(x) = -\frac{2x+4}{(x-1)^4}.$$

Luego f es creciente cuando

$$f'(x) = -\frac{2x+4}{(x-1)^4} > 0,$$

o bien, $x \in (-\infty, -2)$. Análogamente f es decreciente cuando $f'(x) = -\frac{2x+4}{(x-1)^4} < 0$, o bien, $x \in (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Puntajes: 1 punto por el cálculo correcto de la derivada y 1 punto por cada intervalo de monotonía. Se descontó 0,5 puntos en caso de no haber desarrollo respecto a los intervalos de monotonía y 0,5 puntos si el punto $x = 1$ no se omitió en el intervalo donde f es decreciente.

- (b) Usando regla de la división para derivar $f'(x)$ como antes se obtiene que

$$f''(x) = \frac{6x+18}{(x-1)^5},$$

y sigue que el único candidato a punto de inflexión es $x = -3$. Evaluando apropiadamente se obtiene que el signo de f'' entre sus puntos críticos es

$$-\infty \overset{+}{\leftarrow} -3 \overset{-}{\leftarrow} 1 \overset{+}{\leftarrow} \infty,$$

de donde se comprueba que -3 es un punto de inflexión.

Puntajes: 1 punto por el cálculo correcto de f'' , 0,5 puntos por determinar el candidato a punto de inflexión y 0,5 puntos por comprobar que efectivamente es un punto de inflexión.

2. El carboplatino es un fármaco de quimioterapia usado para tratar el cáncer de pulmón y de ovario entre otros. Las dosis dependen de varios parámetros, entre los que se encuentran la edad, el peso y el sexo del paciente. Para pacientes femeninos, las fórmulas para las dosis de droga son:

$$D = 0,85A(c + 25) \quad \text{y} \quad c = (140 - y) \frac{w}{72x},$$

donde A y x dependen de la droga usada, D es la dosis en mg, c es el aclaramiento de creatinina (concentración de creatinina en la sangre) en mg/mL, y es la edad del paciente en años y w es la masa del paciente en kilogramos. Suponga que una mujer de 45 años, cuya droga tiene parámetros $A = 5$ y $x = 0,6$. Use esta información para escribir las fórmulas para $D(c)$ y $c(w)$, y responder:

- (a) Calcule con las fórmulas encontradas anteriores tanto $\frac{dD}{dc}$ y $\frac{dc}{dw}$.
- (b) Describa una forma de encontrar $\frac{dD}{dw}$ y encuentre el valor de la derivada.
- (c) Interpretativamente, $\frac{dD}{dc}$ significa la razón con la que cambia la dosis de acuerdo con el aclaramiento de creatinina. En ese contexto, interprete $\frac{dc}{dw}$ y $\frac{dD}{dw}$ con sus valores encontrados y sus respectivas unidades de medida.

Solución: Antes que todo veamos que con los parámetros dados tenemos

$$D(c) = 4,25c + 106,25 \quad \text{y} \quad c(w) = \frac{95}{43,2}w.$$

Puntajes: 0,5 por cada expresión.

- (a) basta ver que

$$\frac{dD}{dc} = 4,25 \quad \text{y} \quad \frac{dc}{dw} = \frac{95}{43,2} \approx 2,199.$$

Puntajes: 1 punto por cada derivada. Se descontó medio punto por usar el signo $=$ en vez de \approx .

- (b) Dado que D depende de c y c de w , la derivada $\frac{dD}{dw}$ debe ser calculada con regla de la cadena:

$$\frac{dD}{dw} = \frac{dD}{dc} \frac{dc}{dw} = 4,25 \cdot \frac{95}{43,2} \approx 9,346.$$

Puntajes: 1 punto por el cálculo usando regla de la cadena.

- (c) Por un lado tenemos que

$$\frac{dc}{dw} = 2,199 \frac{\text{mg}}{\text{mL} \cdot \text{kg}} = 2,199 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mL}},$$

de donde la razón de cambio del aclaramiento de creatinina respecto al peso es $2,199 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mL}}$, o bien, el cambio del aclaramiento de creatinina instantaneo por kg es de aproximadamente 2,199 mg/mL.

Por otro lado,

$$\frac{dD}{dw} = 9,346 \frac{\text{mg}}{\text{kg}},$$

de donde la razón de cambio de la dosis respecto al peso es de $9,346 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$, o bien, el cambio instantaneo de dosis por kg es de 9,346 mg. Puntajes: 0,5 puntos por cada interpretación.

¹Esto es igual a $9,346 \cdot 10^{-6}$ sin embargo es una convención usar la unidad mg/kg para cantidad de dosis por peso de un paciente.