Universidad de Chile
Facultad De Medicina
Unidad de Biomatemática
Primer Semestre 2021

CB1006-2 - Matemáticas

Preguntas de Desarrollo del Certámen 2

Profesores: José Aburto
Caroll Cuellar
Esteban Gutiérrez
Diego Montengro

1. Una molécula del producto C está conformada por una molécula de un reactivo A y una molécula de un reactivo B. Si la concentración inicial de A y B es $[A] = [B] = a$ moles/l, entonces la concentración de C en un instante t, medido en segundos, estará dada por

$$[C] = \frac{a^2kt}{akt+1},$$

donde k es una constante.

(a) Determine qué pasa con la concentración $[C]$ cuando $t \to \infty$.

(b) Demuestre que la razón de cambio de la concentración respecto al tiempo es proporcional a $(a-[C])^2$, es decir, es igual a una constante multiplicada por $(a-[C])^2$.

(c) Use la parte anterior para determinar qué pasa con la razón de cambio de la concentración respecto al tiempo, cuando $t \to \infty$.

Solución:

(a) Se pide calcular el límite $\lim\limits_{t\to\infty}[C]$, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a^2kt}{akt+1} \ .$$

Para esto basta multiplicar tanto en el numerador como el denominador por $1/t$ para ver que

$$\lim_{t\to\infty}[C] = \lim_{t\to\infty} \frac{a^2k}{ak+1/t} = \frac{a^2k}{ak} = a \ .$$

Puntajes: 1 punto por el cálculo del límite correctamente.

(b) Se pide probar que existe una constante, digamos λ, tal que

$$\frac{d}{dt}[C] = \lambda(a-[C])^2 \ .$$

Primero veamos que $[C]$ es una división de polinomios, de donde podemos calcular su derivada por medio de la regla de la división

$$\frac{d}{dt}[C] = \frac{(a^2kt)'(akt+1) - (akt+1)'(a^2kt)}{(akt+1)^2} \ .$$

Veamos que $(a^2kt)' = a^2k$ y $(akt+1)' = ak$, de donde

$$\frac{d}{dt}[C] = k\left(\frac{a}{akt+1}\right)^2 .$$

Por otro lado es fácil ver que

$$(a-[C])^2 = \left(\frac{a}{akt+1}\right)^2 ,$$

de donde se concluye que

$$\frac{d}{dt}[C] = k(a-[C])^2 ,$$

o bien, que $\lambda = k$.
Puntajes: 1,5 puntos por el cálculo correcto de la derivada de $[C]$, 1 punto por el calculo de $(a-[C])^2$ y 0,5 puntos por concluir.

(c) Esta pregunta tenía dos soluciones posibles:

i. De la parte anterior sabemos que $\frac{d}{dt}[C] = k\left(\frac{a}{akt+1}\right)^2$, por lo que basta calcular

$$\lim_{t\to\infty} k\left(\frac{a}{akt+1}\right)^2 = k\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a}{akt+1}\right)\lim_{t\to\infty} k\left(\frac{a}{akt+1}\right) = k\cdot 0\cdot 0 = 0 .$$

ii. De la parte anterior sabemos que $\frac{d}{dt}[C] = k(a-[C])^2$, de donde

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}[C] = \lim_{t\to\infty} k(a-[C])^2 = k\lim_{t\to\infty}(a-[C])\lim_{t\to\infty}(a-[C]) = k\cdot(a-a)\cdot(a-a) = 0 .$$

Puntajes: 1 punto por el cálculo correcto de la derivada. Puntaje adicional para aquellos que hicieron la solución ii.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^3+128}{x}$, determine:

(a) Puntos máximos y/o mínimos de $f(x)$, tanto globales como locales de f, si existen.

(b) Intervalos de concavidad de $f(x)$.

Solución:

(a) Primero veamos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty ,$$

de donde la función no tiene ni máximos ni mínimos globales.
Veamos además que

$$f'(x) = \frac{2x^3-128}{x^2} ,$$

de donde los puntos críticos son $\{0,4\}$. Como la función se indetermina en 0 en dicho punto no hay ni máximo ni mínimo.
Para analizar $x=4$ hay dos soluciones posibles:

i. Los signos de f' entre los puntos críticos son

$$-\infty \overset{-}{\longleftrightarrow} 0 \overset{-}{\longleftrightarrow} 4 \overset{+}{\longleftrightarrow} \infty ,$$

de donde $f(4)$ es un mínimo local.

ii. Veamos que

$$f''(x) = \frac{2x^3+256}{x^3} ,$$

de donde $f''(4) > 0$ y $f(4)$ es un mínimo local.

Como no hay más puntos críticos por analizar sigue que la función no tiene ningún máximo local. Puntajes: 1 punto por calcular correctamente ambos puntos críticos, 1 punto por un correcto análisis en $x = 4$ (en el caso de hacer análisis de signos es crucial incluir TODOS los puntos críticos) y 1 punto por concluir correctamente mencionando que no hay máximos de ningún tipo ni mínimos globales, y que $f(4)$ es un mínimo local (o relativo).

(b) Primero veamos que

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 256}{x^3} ,$$

por lo que los puntos críticos de f'' son $\{-4\sqrt[3]{2}, 0\}$ y los signos de f'' entre los puntos críticos son

$$-\infty \overset{+}{\longleftrightarrow} -4\sqrt[3]{2} \overset{-}{\longleftrightarrow} 0 \overset{+}{\longleftrightarrow} \infty ,$$

por lo que f es concava hacia arriba en $(-\infty, -4\sqrt[3]{2}) \cup (0, \infty)$ y es concava hacia abajo en $(-4\sqrt[3]{2}, 0)$. Puntajes: 1 punto por el cálculo correcto de la segunda derivada y 1 punto por el cálculo de los intervalos de concavidad.