Universidad de Chile
Facultad De Medicina
Unidad de Biomatemática
Primer Semestre 2021

CB1006-4 - Matemáticas

Preguntas de Desarrollo del Certámen 2

Profesores: José Aburto
Caroll Cuellar
Esteban Gutiérrez
Diego Montengro

1. Una molécula del producto C está conformada por una molécula de un reactivo A y una molécula de un reactivo B. Si la concentración inicial de A y B es $[A] = [B] = b$ moles/l, entonces la concentración de C en un instante t, medido en segundos, estará dada por

$$[C] = \frac{b^2kt}{bkt+1},$$

donde k es una constante.

(a) Determine qué pasa con la concentración $[C]$ cuando $t \to \infty$.

(b) Demuestre que la razón de cambio de la concentración respecto al tiempo es proporcional a $(b - [C])^2$, es decir, es igual a una constante multiplicada por $(b - [C])^2$.

(c) Use la parte anterior para determinar qué pasa con la razón de cambio de la concentración respecto al tiempo, cuando $t \to \infty$.

Solución:

(a) Se pide calcular el límite $\lim_{t\to\infty} [C]$, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b^2kt}{akt+1} .$$

Para esto basta multiplicar tanto en el numerador como el denominador por $1/t$ para ver que

$$\lim_{t\to\infty} [C] = \lim_{t\to\infty} \frac{b^2k}{bk+1/t} = \frac{b^2k}{bk} = b .$$

Puntajes: 1 punto por el cálculo del límite correctamente.

(b) Se pide probar que existe una constante, digamos λ, tal que

$$\frac{d}{dt}[C] = \lambda(b - [C])^2 .$$

Primero veamos que $[C]$ es una división de polinomios, de donde podemos calcular su derivada por medio de la regla de la división

$$\frac{d}{dt}[C] = \frac{(b^2kt)'(bkt+1) - (bkt+1)'(b^2kt)}{(bkt+1)^2} .$$

Veamos que $(b^2kt)' = b^2k$ y $(bkt+1)' = bk$, de donde

$$\frac{d}{dt}[C] = k\left(\frac{b}{bkt+1}\right)^2 .$$

Por otro lado es fácil ver que

$$(b-[C])^2 = \left(\frac{b}{bkt+1}\right)^2 ,$$

de donde se concluye que

$$\frac{d}{dt}[C] = k(b-[C])^2 ,$$

o bien, que $\lambda = k$.
Puntajes: 1,5 puntos por el cálculo correcto de la derivada de $[C]$, 1 punto por el calculo de $(b-[C])^2$ y 0,5 puntos por concluir.

(c) Esta pregunta tenía dos soluciones posibles:

i. De la parte anterior sabemos que $\frac{d}{dt}[C] = k\left(\frac{b}{bkt+1}\right)^2$, por lo que basta calcular

$$\lim_{t\to\infty} k\left(\frac{b}{bkt+1}\right)^2 = k\lim_{t\to\infty}\left(\frac{b}{bkt+1}\right)\lim_{t\to\infty} k\left(\frac{b}{bkt+1}\right) = k\cdot 0\cdot 0 = 0 .$$

ii. De la parte anterior sabemos que $\frac{d}{dt}[C] = k(b-[C])^2$, de donde

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}[C] = \lim_{t\to\infty} k(b-[C])^2 = k\lim_{t\to\infty}(b-[C])\lim_{t\to\infty}(b-[C]) = k\cdot(b-b)\cdot(b-b) = 0 .$$

Puntajes: 1 punto por el cálculo correcto de la derivada. Puntaje adicional para aquellos que hicieron la solución ii.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^3+128}{x}$, determine:

(a) Intervalos de monotonía de $f(x)$.

(b) Puntos de inflexión de $f(x), siexisten.$

Solución:

(a) Primero veamos que

$$f'(x) = \frac{2x^3-128}{x^2} ,$$

de donde los puntos críticos son $\{0,4\}$. Evaluando apropiadamente sigue que los signos de f' entre los puntos críticos son

$$-\infty \overset{-}{\longleftrightarrow} 0 \overset{-}{\longleftrightarrow} 4 \overset{+}{\longleftrightarrow} \infty ,$$

de donde f es creciente en $(4,\infty)$ y es decreciente en $(-\infty,0)\cup(0,4)$. Puntajes: 1,5 punto por calcular correctamente la derivada de f junto a ambos puntos críticos y 1 punto por el cálculo de ambos intervalos de monotonía correctamente.

(b) Primero veamos que

$$f''(x) = \frac{2x^3+256}{x^3} ,$$

por lo que los puntos críticos de f'' son $\{-4\sqrt[3]{2}, 0\}$ y los signos de f'' entre los puntos críticos son

$$-\infty \overset{+}{\longleftrightarrow} -4\sqrt[3]{2} \overset{-}{\longleftrightarrow} 0 \overset{+}{\longleftrightarrow} \infty ,$$

de donde tanto $-4\sqrt[3]{2}$ como 0 son puntos de inflexión para f.
Puntajes: 1 punto por el cálculo correcto de la segunda derivada, 1 punto por el correcto análisis de signos y 0,5 puntos por concluir con los puntos de inflexión (dado que f no está definida en 0 y hay ambigüedad en la literatura respecto a si considerarlo o no un punto de inflexión solo se consideró puntaje por $-4\sqrt[3]{2}$).