NOCIONES DE PROBABILIDADES

Gabriel Cavada

Julio de 2020

Cálculo de probabilidades

- **Introducción**

  El cálculo de probabilidades tiene su origen en la época pos renacentista, nace del estudio de los juegos de azar, del deseo de poder cuantificar las posibilidades de ganar o perder que se tienen ante una mano de naipes, el lanzamiento de un dado o lanzar una moneda al aire. Sin embargo este interés lúdico inicial trascendió en la historia del pensamiento, pues un análisis mas fino de cualquier situación real nos lleva a considerar una porción de azar (imponderables) que está presente en la misma.

Cálculo de probabilidades

- **¿De qué estamos seguros?**

  Sólo de nuestra muerte “biológica”, la mayoría de las veces cuando decimos que algo será “seguro” en realidad estamos diciendo que es altamente probable que ocurra.

Cálculo de probabilidades

- Al estudiar la realidad podemos distinguir dos tipos de experimentos: Los determinísticos y los probabilísticos.
- Los experimentos determinísticos son aquellos que tienen sólo un resultado posible y además este es predecible.
- Los experimentos probabilísticos son aquellos que tienen mas de un resultado posible y cada resultado no es predecible.

Cálculo de probabilidades

- Dado un experimento cualquiera, que denotaremos por E, llamamos ESPACIO MUESTRAL, denotado por Ω, al conjunto de todos los posibles resultados de E. Como ejemplos tenemos:

a) E: Se lanza una moneda al aire

$$\Omega=\{\text{cara, sello}\}$$

b) E: Se lanza un dado

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

c) E: Se juega una cartilla de Loto

$$\Omega_1=\{\text{se gana premio, no se gana premio}\} \text{ ó}$$

$$\Omega_2=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

Cálculo de probabilidades

- Se llama suceso o evento a cualquier subconjunto de Ω.
- Los sucesos se denotan por letras mayúsculas: A, B,…
- El hecho que A sea un suceso de Ω, lo denotamos por $A \subset \Omega$.
- El conjunto vacío ($\emptyset$) es un suceso, pues $\emptyset \subset \Omega$ y le llamamos suceso vacío o suceso imposible.
- Como $\Omega \subset \Omega$, Ω también es un suceso que llamamos suceso seguro.

Cálculo de probabilidades

Si jugamos al Cara y Sello y previamente se nos pregunta por la “probabilidad” de sacar Cara, seguramente diremos que es de 50%, pues diremos que hay sólo dos posibles resultados, pero además hemos supuesto que las posibilidades de obtener Cara son idénticas a las de obtener Sello, este concepto se denomina EQUIPROBABILIDAD

Cálculo de probabilidades

- Se llama medida de un conjunto a algún número que nos indique el tamaño del conjunto, la medida del conjunto A se denota por m(A).
- Si el conjunto es finito y se pueden contar sus elementos, la medida natural que aparece es m(A)="número de elementos del conjunto".
- Si el conjunto es un intervalo de la recta real o una porción del plano cartesiano puede considerarse como m(A)="longitud del intervalo" o m(A)="área de la porción del plano cartesiano" según sea el caso.

Cálculo de probabilidades

- **Definición clásica de probabilidad**
- Introducido el concepto de medida, podemos dar una definición de probabilidad del un suceso A como: "medida de A dividido por medida de Ω", en símbolos:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Cálculo de probabilidades

- De esta definición aparecen dos resultados fundamentales:
    - $P(\emptyset)=0$, la probabilidad del suceso imposible es nula.
    - $P(\Omega)=1$, la probabilidad del espacio muestral es 1.

Cálculo de probabilidades

- Dos sucesos A y B se dicen excluyentes, si es IMPOSIBLE que ocurran juntos (al mismo tiempo), en símbolos $A \cap B = \emptyset$.
- Por ejemplo se lanza un dado y el dado muestra “un número par e impar” a la vez.

Cálculo de probabilidades

- Hechas las consideraciones anteriores, enunciamos los AXIOMAS del cálculo de probabilidades:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$
  2. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Cálculo de probabilidades

- Para enfrentar un problema de cálculo de probabilidades, se debe poner especial cuidado en definir los sucesos de interés. Ejemplifiquemos con algunas situaciones elementales del experimento "lanzar un dado":

  E: Se lanza un dado, así: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

  Definamos los sucesos siguientes y calculemos sus probabilidades de ocurrencia:

1. A: "el dado muestra as", así: A=$\{1\}$ y m(A)=1, con lo que:

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

2. B: "el dado muestra un número impar", así B=$\{1,3,5\}$ y m(B)=3, con lo que:

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Cálculo de probabilidades

- La realidad presenta sucesos compuestos, los que se forman uniéndolos , intersectándolos y complementándolos.
- Dados los sucesos A y B se tiene:
  - $A \cap B$: sucede A y sucede B (suceden ambos a la vez)
  - $A \cup B$: sucede A ó B, así $P(A \cup B)=P(A) + P(B) – P(A \cap B)$
  - A^c : no sucede A, así $P(A^c)=1 – P(A)$

Cálculo de probabilidades

Decimos de los sucesos A y B son INDEPENDIENTES, si la ocurrencia de uno de ellos no altera la ocurrencia o no ocurrencia del otro, la hipótesis de independencia se expresa así:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Cálculo de probabilidades

Además la realidad presenta abundantemente SUCESOS CONDICIONALES, es decir sucesos que condicionan su ocurrencia a la presencia de otros, así podemos preguntarnos por la probabilidad de que ocurra un evento DADO EL HECHO que ocurrió tal o cual evento.

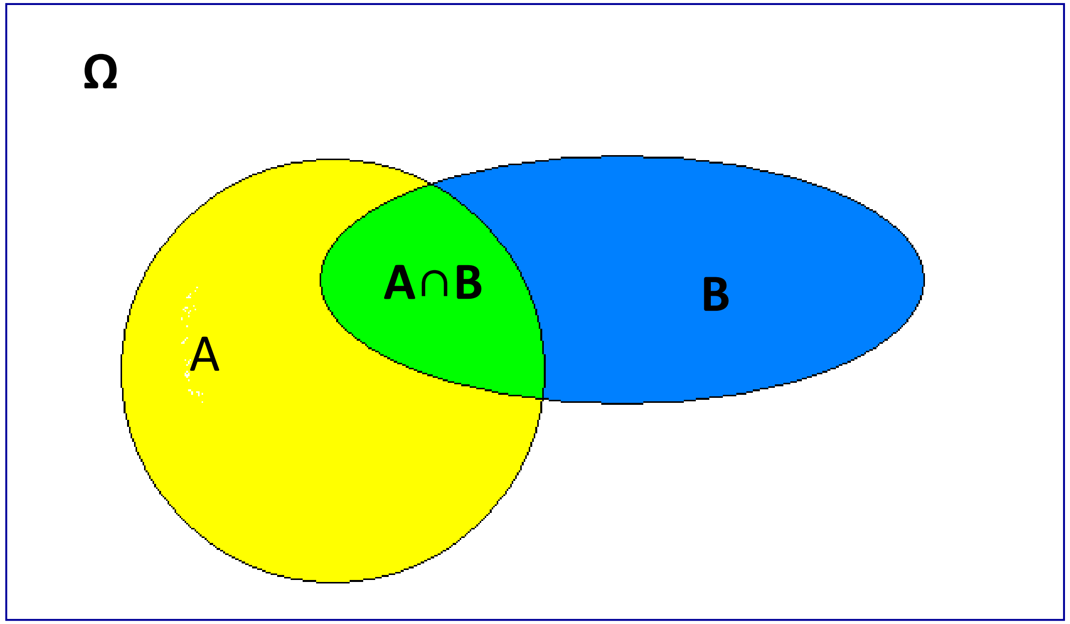
Cálculo de probabilidades

Si consideramos los sucesos A y B, de modo que B condiciona la ocurrencia de A entonces la probabilidad de que “ocurra A dado el hecho que ocurrió B” es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cálculo de probabilidades

Condicionar el suceso A al suceso B, es reducir el espacio muestral a B.



Cálculo de probabilidades

- De la fórmula:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Tener presente que:

- $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$
- $P(A|B) \neq P(B|A)$

Cálculo de probabilidades

- Ejemplo: Considerar la siguiente tabla:

	Sano	Enfermo	
Mujer	6	2	**8**
Hombre	8	4	**12**
	14	**6**	**20**

Aquí se pueden distinguir cuatro sucesos, de los cuales dos son fundamentales:

A : la persona es MUJER
B : la persona está SANA
A^c : la persona es HOMBRE
B^c : la persona está ENFERMA

Cálculo de probabilidades

	Sano (B)	Enfermo (B^c)	
Mujer (A)	6	2	**8**
Hombre (A^c)	8	4	**12**
	14	**6**	**20**

-P(A) = 8/20= 0.40, la probabilidad de ser mujer.

- P(B) = 14/20=0.60, la probabilidad de estar sano.

-$P(A\cap B^c)$=2/20=0.10, la probabilidad de ser mujer y estar enfermo.

-P(A|B)=6/14=0.43, la probabilidad de ser mujer dado que está sano.

P(B|A)=6/8=0.75, la probabilidad de estar sano dado que es mujer.

Cálculo de probabilidades

- En múltiples oportunidades la ocurrencia de un suceso principal A se debe a la ocurrencia previa de causas, que también son sucesos, de modo que en el cálculo de la probabilidad de la ocurrencia de A las probabilidades de los sucesos causales deben ser incluidas según la ponderación o influencia que tengan sobre A.

  Si el suceso principal A se debe a las causas E_1, E_2,...,E_n , entonces:

Cálculo de probabilidades

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n)$$

$$=$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)$$

Esta fórmula recibe el nombre de TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Cálculo de probabilidades

Ejemplo: En un hospital hay tres servicios: Urgencia, Cirugía y Medicina. El porcentaje de hospitalizados por servicio es: Urgencia 30%, Cirugía 20% y Medicina 50%. Si la mortalidad en cada servicio es 10%, 5% y 3% respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente hospitalizado muera?

Suceso principal, A : el paciente muere

Causas : E_1: el paciente está en urgencia

E_2: el paciente está en cirugía

E_3: el paciente está en medicina

$$P(A) = P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + P(A \mid E_3)P(E_3)$$

$$P(A) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2 + 0.03 \cdot 0.5 = 0.055$$

Cálculo de probabilidades

- En ocasiones es necesario calcular la probabilidad de que una determinada causa haya producido el suceso principal. Es decir necesitamos saber $P(E_k|A)$.
- En el ejemplo: Si se nos comunica que ha ocurrido una muerte, ¿Cuál es la probabilidad que haya ocurrido en Urgencia?

  Suceso principal, A : el paciente muere.

  Causas:E_1: el paciente está en Urgencia;E_2: el paciente está en Cirugía; E_3: el paciente está en Medicina

  Es decir se pide:

$$P(E_1 | A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap E_1)}{P(A)} = \frac{P(A | E_1) \cdot P(E_1)}{P(A | E_1) \cdot P(E_1) + P(A | E_2) \cdot P(E_2) + P(A | E_3) \cdot P(E_3)}$$

Cálculo de probabilidades

Suceso principal, A : el paciente muere

Causas : E_1: el paciente está en urgencia

E_2: el paciente está en cirugía

E_3: el paciente está en medicina

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + P(A|E_3)P(E_3)$$

P(A) = 0.1·0.3 + 0.05·0.2 + 0.03·0.5 = 0.055

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap E_1)}{P(A)} = \frac{P(A|E_1)\cdot P(E_1)}{P(A|E_1)\cdot P(E_1) + P(A|E_2)\cdot P(E_2) + P(A|E_3)\cdot P(E_3)}$$

$$P(E_1|A) = \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.055} = 0.545$$

Cálculo de probabilidades

- Generalizando el resultado anterior

$$P(E_k \mid A) = \frac{P(A|E_k)\cdot P(E_k)}{P(A|E_1)\cdot P(E_1) + P(A|E_2)\cdot P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)\cdot P(E_n)}$$

$ó$

$$P(E_k \mid A) = \frac{P(A|E_k)\cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)\cdot P(E_i)}$$

Fórmula que es conocida como el TEOREMA DE BAYES