



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Derivada como razón de cambio

Unidad de Biomatemática 2022

# LOGROS DE APRENDIZAJE

- Distingue entre razones de cambio promedio e instantáneas.
- Relaciona problemas físicos y geométricos con los conceptos de derivadas.
- Resuelve problemas que involucran razones de cambios.

# CONTENIDOS

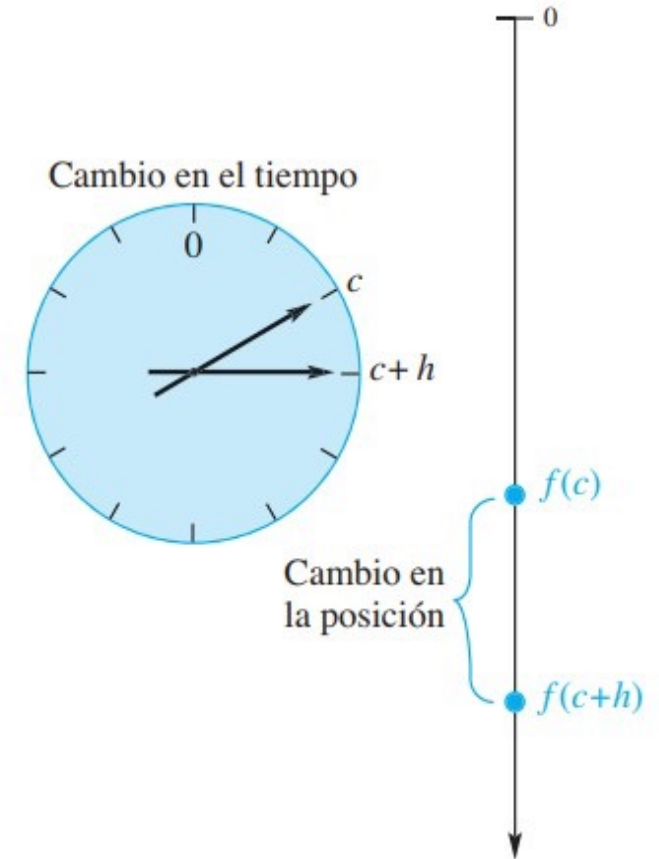
- Variación media e instantánea.
  - Velocidad promedio.
  - Velocidad instantánea.
- Recta secante y recta tangente.



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# VARIACIÓN MEDIA E INSTANTÁNEA





# Velocidad Media

Velocidad media o razón de cambio promedio, en un intervalo  $[t_1, t_2]$ :

$$\frac{\text{Cambio en la distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

# Velocidad Instantánea

Velocidad instantánea en el instante  $t$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

# Observaciones



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

- La función velocidad es la derivada de la función posición.
- La velocidad puede ser positiva negativa o cero.
- La rapidez, entendiendo por tal el valor absoluto de la velocidad nunca es negativa.

# De la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$





Vamos a los ejercicios de clase 1 y 2  
(cuadernillo de trabajo)

- 1) Suponga que el peso en gramos de un tumor canceroso, después de un tiempo  $t$ , medido en semanas, está dado por:  $P(t) = 0,2t^2$ .

Determine:

- ¿Qué significa  $P(t)$ ?
- ¿Qué significa  $P(t + h)$ ?
- ¿Cuántos gramos pesa el tumor, al cabo de 2, 3 y 4 semanas?
- ¿Qué significa  $P(t + h) - P(t)$ ?
- ¿En cuántos gramos, varía el peso del tumor entre la 2ª y 3ª semana?
- ¿Qué significa:  $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ ?
- En promedio ¿en cuántos gramos, varía el peso del tumor entre la 2ª y 4ª semana?
- ¿A qué razón varía el peso del tumor, al cumplirse la 3ª semana?

# Solución:

a)

b)

c)



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Solución:

d) ¿Qué significa  $P(t+h) - P(t)$ ?

*El aumento o disminución de la masa del tumor entre la semana  $t$  y la semana  $t+h$ , es decir, el cambio en la masa del tumor producido en el intervalo de tiempo  $[t, t+h]$ .*

e)



# Solución:

f) ¿Qué significa  $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ ?

*El aumento promedio de crecimiento del tumor entre la semana  $t$  y la semana  $t+h$ , medido en g/semanas.*

g)

h)



**FACULTAD DE MEDICINA**  
UNIVERSIDAD DE CHILE



2) Es habitual que los bebés pierdan masa durante unos pocos días, posteriormente aumentan de masa. Un modelo para la masa media de los bebés, medido en kilogramos, durante las dos primeras semanas de vida, es:

$$P(t) = 0,015t^2 + 0,18t + 3,1$$

con  $t$  medido en días y  $P(t)$  en kg.

- ¿Cuál es la variación media de la masa del bebé entre el 5º y 6º día haber nacido?
- ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la masa del bebé al cumplir 5 días de vida?

# Solución:



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE





FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Aplicaciones a la física...

# Velocidad, rapidez y aceleración de una partícula en movimiento:



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

Si  $f(t)$ , representa la **función posición** de un objeto, la **velocidad** en el instante  $t_0$  del objeto, se obtiene por la derivada de  $f$  en  $t_0$ , es decir:

$$V(t_0) = f'(t_0)$$

La velocidad, indica dirección:

- Si es positiva, el objeto va hacia arriba o hacia la derecha.
- Si es negativa, el objeto va hacia abajo o hacia la izquierda.

**NOTA:** La **rapidez** del objeto, es el valor absoluto de su velocidad.



# Velocidad, rapidez y aceleración de una partícula en movimiento:

Aceleración de una partícula en movimiento.

Si  $v(t)$ , representa la función velocidad de un objeto, la aceleración en el instante  $t_0$  del objeto, se obtiene por la derivada de  $v$  en  $t_0$ , es decir:

$$a(t_0) = v'(t_0)$$



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

Vamos al ejercicio de clase 3  
(cuadernillo de trabajo)

- 3) Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba, de modo que su altura  $s$ , dada en metros (m),  $t$  segundos (s) después de disparado está dada por:

$$s(t) = 731t - 4,9t^2$$

- a) Encuentre una expresión para la velocidad media del proyectil en el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$  donde  $t$  y  $t + \Delta t$  son valores del dominio de  $s(t)$ .
- b) Encuentre la velocidad media del proyectil en los intervalos:  $[5; 5,01]$  s y  $[5; 5,001]$  s
- c) Encuentre la velocidad instantánea del proyectil en cualquier instante  $t$ , donde  $t$  pertenece al dominio de  $s(t)$ .
- d) ¿Cuál es la velocidad instantánea del proyectil al cabo de 5 segundos de haber sido lanzado?

# Solución:



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Solución:



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Solución:



FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE







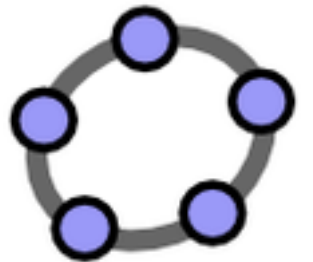
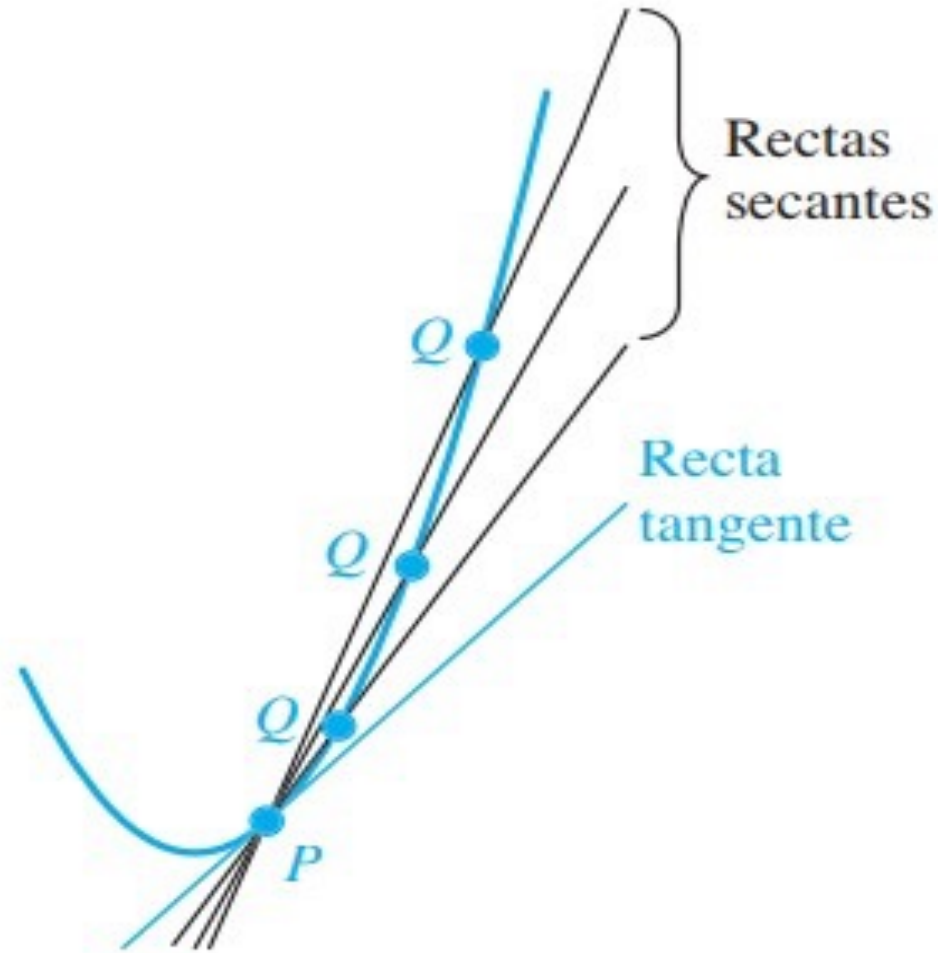
FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Recta secante y recta tangente...

# De la recta secante a la recta tangente

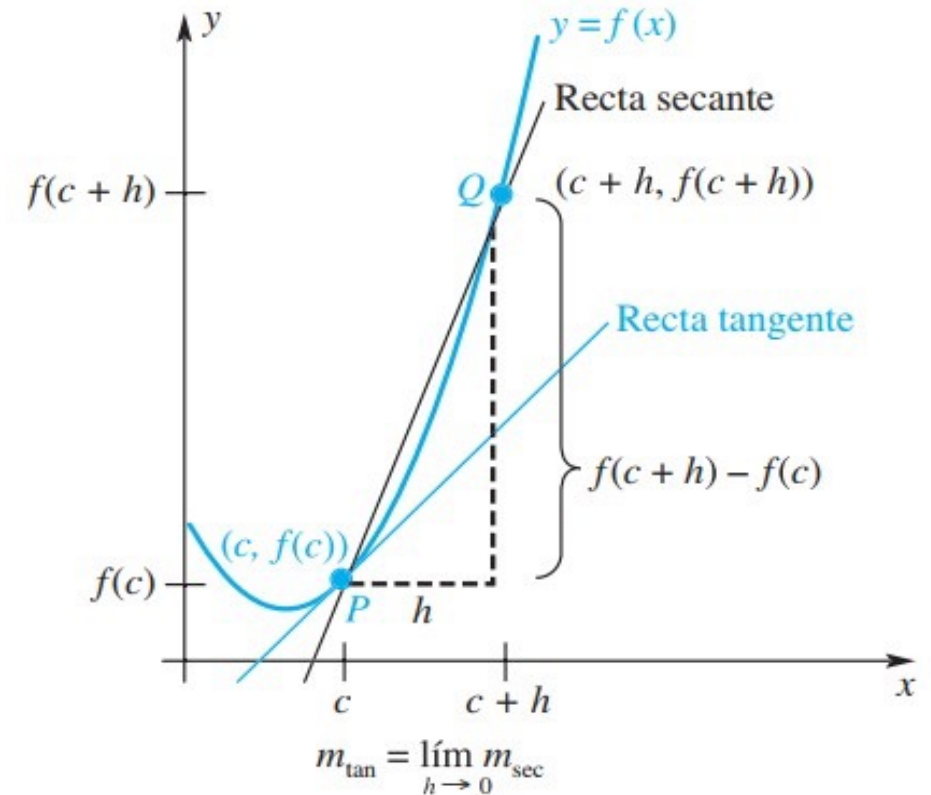


FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Recta tangente

- Sea  $x_0 = c$ , perteneciente a una función  $f(x)$  entonces:
- Recta tangente a  $f$  en el punto  $x_0 = c$  será:
- $y - f(c) = f'(c)(x - c)$





FACULTAD DE MEDICINA  
UNIVERSIDAD DE CHILE

Vamos al ejercicio de clase 4  
(cuadernillo de trabajo)

4) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = (4 - x)^2$  en el punto  $(1,9)$ . Trace la gráfica de  $f(x)$  y la recta tangente en el punto indicado.

