FACULTAD DE MEDICINA UNIVERSIDAD DE CHILE

UNIDAD DE BIOMATEMÁTICA

SOLUCIONES
"APLICACIÓN DE LA DERIVADA AL TRAZADO DE CURVAS Y OPTIMIZACIÓN"

CARRERAS:
ENFERMERÍA – OBSTETRICIA Y PUERICULTURA

Equipo coordinador:

Profesora Encargada de Curso:
Ingrid Galaz Paredes

Profesora Coordinadora:
Driyette Aliaga Ortega

AÑO 2022

SOLUCIONES ACTIVIDAD AUTÓNOMA

1. Relaciones cada (…)

Tabla 1 −> Gráfico 3
Tabla 2 −> Gráfico 2
Tabla 3 −> Gráfico 4
Tabla 4 −> Gráfico 1

2. Necesitamos una función que al menos sea dos veces derivable y tal que $f''(x) \neq cte$, ya que la concavidad varía según los valores de x. Es decir, necesitamos una función de al menos tercer grado.

Sea:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \text{ número reales.}$$

Derivando:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Y derivando nuevamente:

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Sabemos que:

$$f(2) = 1 \quad (1)$$
$$f'(2) = 0 \quad (2)$$
$$f(4) = 4 \quad (3)$$
$$f''(4) = 0 \quad (4)$$
$$f(6) = 7 \quad (5)$$
$$f'(6) = 0 \quad (6)$$

De la ecuación (4) podemos obtener:

$$f''(4) = 0 \Longrightarrow 6a \cdot 4 + 2b = 0 \Longrightarrow 24a + 2b = 0$$

A partir de esto, encontramos la relación:

$$b = -12a \quad (7)$$

Por lo que podemos reescribir la función y la derivada de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^3 - 12ax^2 + cx + d, \text{ con } a, c, d \text{ número reales.}$$

Y su derivada:

$$f'(x) = 3ax^2 - 24ax + c$$

De (2), se obtiene la siguiente relación:

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow 3a \cdot 2^2 - 24a \cdot 2 + c = 0 \Longrightarrow -36a + c = 0$$

A partir de esto, encontramos la relación:

$$c = 36a \tag{8}$$

Nuevamente podemos reescribir la función de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^3 - 12ax^2 + 36ax + d, \text{ con } a, d \text{ números reales.}$$

De (1) podemos obtener:

$$f(2) = 1 \Longrightarrow a \cdot 2^3 - 12a \cdot 2^2 + 36a \cdot 2 + d = 1$$

Es decir:

$$d = 1 - 32a \tag{9}$$

Posteriormente nos queda toda la función dependiendo de a:

$$f(x) = ax^3 - 12ax^2 + 36ax + (1 - 32a) \;\text{ con } a \text{ número real}$$

Basta con usar alguna relación ya sea (3) o (5), en este caso, usando (3):

$$f(4) = 4 \Longrightarrow a \cdot 4^3 - 12a \cdot 4^2 + 36a \cdot 4 + (1 - 32a) = 4$$

Se obtiene:

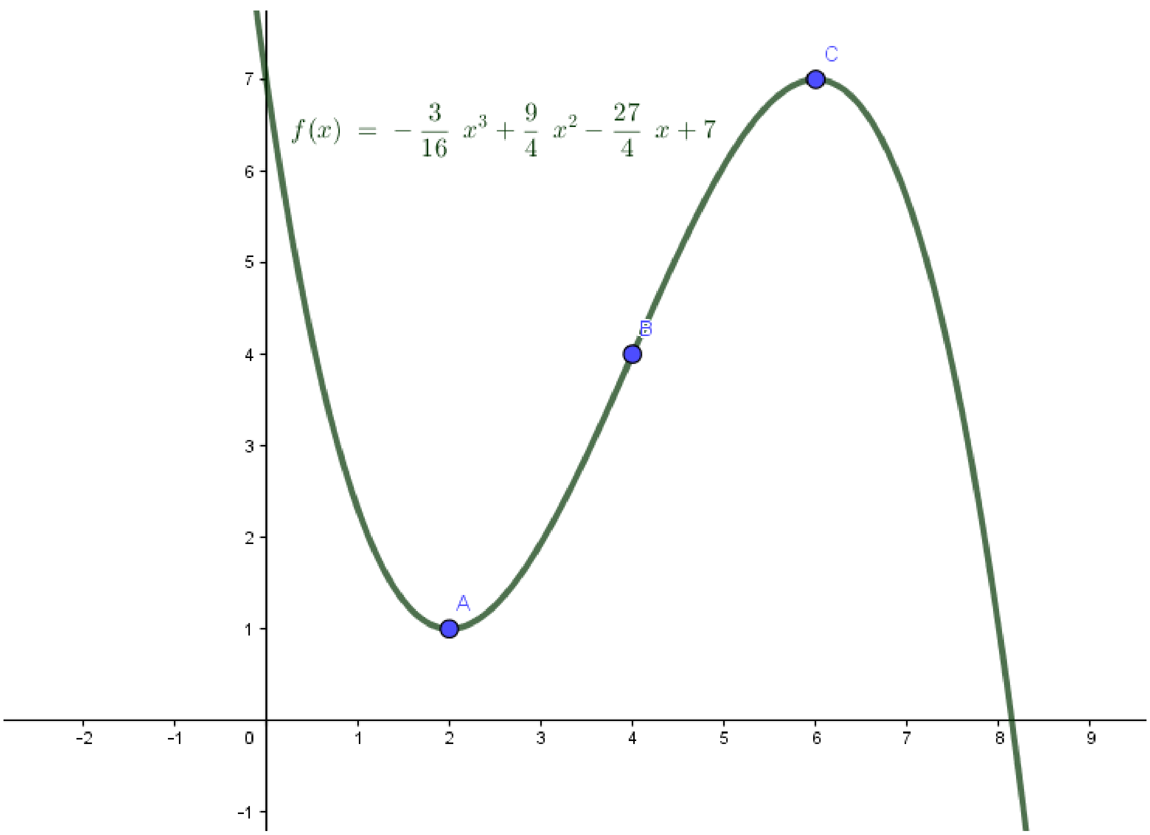
$$a = -\frac{3}{16}$$

Finalmente usando las relaciones obtenidas en (7), (8) y (9):

$$b = \frac{9}{4} \qquad c = -\frac{27}{4} \qquad d = 7$$

Por lo que la ecuación finalmente queda:

$$f(x) = -\frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{4}x + 7$$



3. Determinando lo pedido para cada una de las funciones, tenemos:

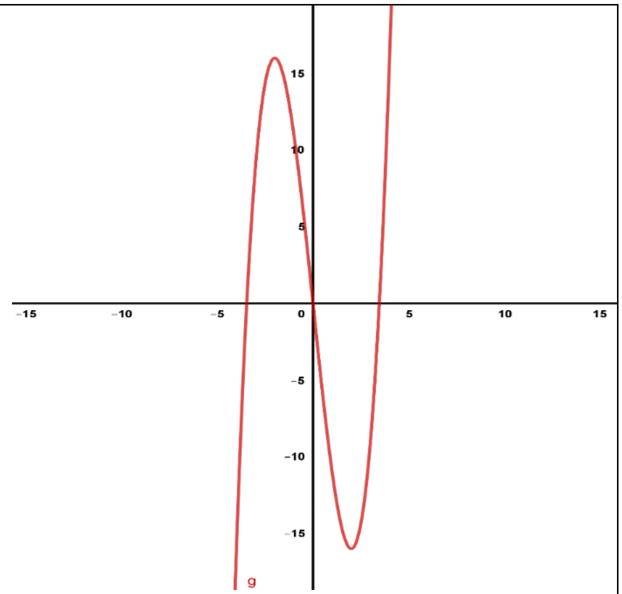
<table>
<tr>
<td>
a) $f(x) = x^3 - 12x$

i. $x = 2$ y $x = -2$

ii. $Mínimo\ (2,-16)$ y
$Máximo\ (-2,16)$

iii. $Crecimiento\ ]-\infty,-2[\ \cup\ ]2,+\infty[$
$Decrecimiento\ ]-2,2[$

iv. Inflexión: $(0,0)$

v. Concavidad: $Negativa\ ]-\infty,0[$
$Positiva\ ]0,+\infty[$
</td>
<td>


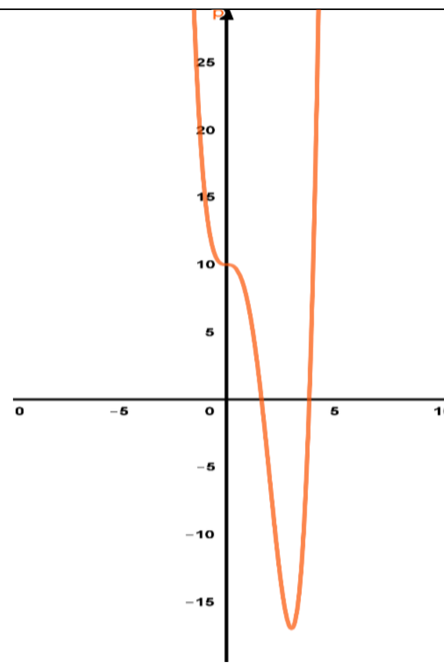
</td>
</tr>
<tr>
<td>
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

i. $x = 0$ y $x = 3$

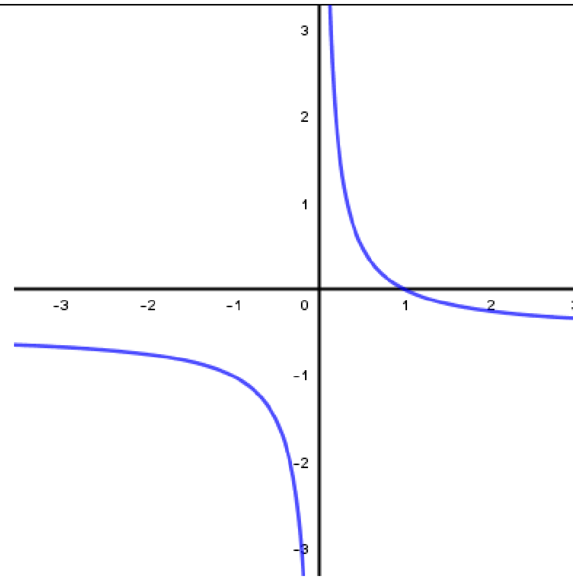
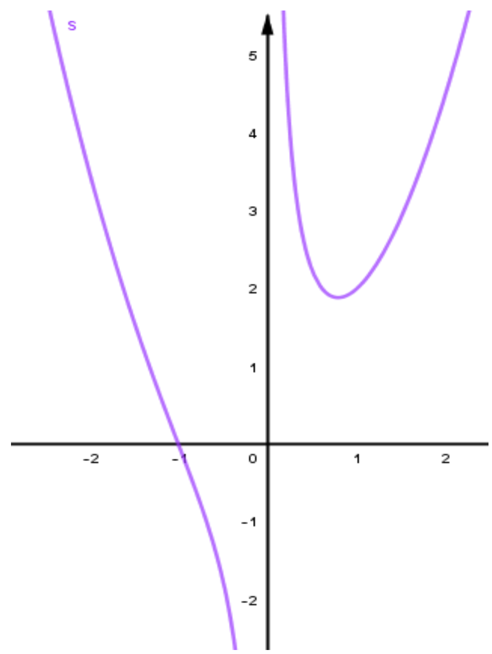
ii. $Mínimo\ (3,-17)$

iii. $Decrecimiento\ ]-\infty,3[$,
$Crecimiento\ ]3,+\infty[$

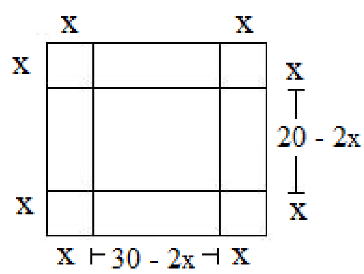
iv. Inflexión: $(0,10)$ y $(2,-6)$

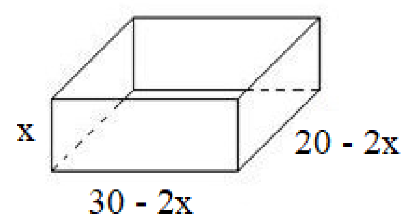
v. Concavidad: $Negativa\ ]0,2[$
$Positiva\ ]-\infty,0[\ \cup\ ]2\,,+\infty[$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{2x}$ i. $x = 0$ ii. $No\ tiene$ iii. Decrecimiento: $R - \{0\}$ iv. No hay puntos de inflexión v. Concavidad: $Negativa:]-\infty, 0[$ $Positiva:]0, +\infty[$	
d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ i. $x = 0$ y $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ii. $Mínimo \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ iii. $Crecimiento:]\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty[$ $Decrecimiento\ ]-\infty, 0[\cup]0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}[$ iv. Inflexión: $(-1,0)$ v. Concavidad: $Negativa\ ]-1,0[$ $Positiva\ ]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$	

4. Llamemos x a la medida de los lados de los cuadrados de las esquinas. Luego, si los cuadrados se cortan y se arma una caja, observamos que las dimensiones son x cm de alto, $(30 - 2x)$ cm de largo y $(20 - 2x)$ cm de ancho, como se muestra en la figura.





Luego, la función que modela el volumen de la caja corresponde a:

$$\begin{aligned} v(x) &= x(30 - 2x)(20 - 2x) \\ &= x(600 - 100x + 4x^2) \\ &= 4x^3 - 100x^2 + 600x \end{aligned}$$

Para determinar el valor de x que maximiza el volumen de la caja, calculamos la derivada de la función $v(x)$ e igualamos a cero.

$$v'(x) = 12x^2 - 200x + 600 = 0$$

Encontrando las soluciones, se obtienen los valores críticos:

$$x_1 = \frac{25 + 5\sqrt{7}}{3} \approx 12{,}74$$
$$x_2 = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3} \approx 3{,}92$$

Para determinar si en ellos se máximo o minimiza, se deben evaluar en la segunda derivada, la cual corresponde a la función:

$$v''(x) = 24x - 200$$

Luego,

$$v''(12{,}74) = 105{,}76 > 0\text{, entonces, punto mínimo local}$$
$$v''(3{,}92) = -105{,}92 < 0\text{, entonces, punto máximo local}$$

Por lo tanto, para maximizar el volumen de la caja, la medida de los cuadrados debe ser igual a $\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$ cm, es decir, aproximadamente 3,92 cm.

5. Para determinar lo solicitado, debemos determinar la derivada de la función $v(r)$ e igualarla a cero para encontrar los puntos críticos.

Notemos que la función $v(r)$ es:

$$v(r) = k(R-r)r^2 = k(Rr^2 - r^3)$$

Luego, su derivada igualada a cero corresponde a:

$$v'(r) = k(2Rr - 3r^2) = 0 \Longrightarrow kr(2R - 3r) = 0$$

Una solución es $r = 0$, mientras que la otra solución se obtiene de $2R - 3r = 0$, donde $r = \frac{2}{3}R$.

Verificamos si maximizan o minimizan evaluando en:

$$v''(r) = 2kR - 6kr$$

Luego, como k y R son constantes positivas, entonces:

$$v''(0) = 2kR > 0\text{, entonces, punto mínimo local.}$$
$$v''\left(\frac{2}{3}R\right) = -2kR < 0\text{, entonces, punto máximo local.}$$

Por lo tanto, un radio de $\frac{2}{3}R$, produce la mayor velocidad de aire expulsado.