Actividades Clase 01
Trigonometría en el Triángulo

---

1. Convierta de grados a radianes (Diapositiva 13)

   a) 300°
   Haciendo la proporción:

$$\frac{180^\circ}{300^\circ} = \frac{\pi}{x}$$
$$\Rightarrow x = \frac{300 \cdot \pi}{180}$$
$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

   b) −18°
   Haciendo la proporción:

$$\frac{180^\circ}{-18^\circ} = \frac{\pi}{x}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-18 \cdot \pi}{180}$$
$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{10} = \frac{19\pi}{10}$$

2. Convierta de radianes a grados

   a) $\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{180^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{\frac{5\pi}{6}}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 180}{\pi}$$
$$\Rightarrow x = 150^\circ$$

   b) 2

$$\frac{180^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2 \cdot 180}{\pi}$$
$$\Rightarrow x = \frac{360^\circ}{\pi}$$

3. Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 41°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37°. ¿Qué altura tiene la montaña? (Diapositiva 20)

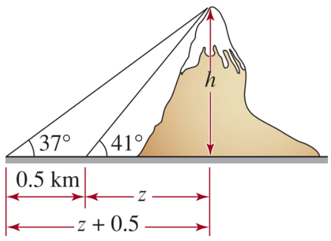

Figura 1: Esquema del Ejercicio

Solución:

Dado el dibujo, se tiene que

$$\tan(41°) = \frac{h}{z} \tag{1}$$

$$\tan(37°) = \frac{h}{z+0{,}5} \tag{2}$$

De 1 $z = \frac{h}{\tan(41°)}$ al reemplazar en 2 se obtiene:

$$\begin{aligned}
(z+0{,}5)\tan(37°) &= h\\
\left(\frac{h}{\tan(41°} + 0{,}5)\tan(37°)\right) &= h\\
\frac{\tan(37°)}{\tan(41°)}\cdot h + 0{,}5\cdot\tan(37°) &= h\\
h\left(\frac{\tan(37°)}{\tan(41°)} - 1\right) &= 0{,}5\tan(37°)\\
h &= \frac{-0{,}5\tan(37°)}{\frac{\tan(37°)-\tan(41°)}{\tan(41°)}}\\
h &= \frac{-0{,}5\tan(41°)\tan(37°)}{\tan(37°)-\tan(41°)}\\
h &\approx 2{,}83 \text{ [km]}
\end{aligned}$$

La altura de la montaña es de aproximadamente 2,83 kilómetros.

Observación

Recordar que 1 km = 1000 m por lo que:

$$\begin{aligned}
2{,}83[\text{km}] &= 2{,}83[\text{km}]\cdot\frac{1000\ [\text{m}]}{1\ [\text{km}]}\\
&= 2830[\text{m}]
\end{aligned}$$

4. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica (Diapositiva 27)

$$\frac{\csc(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

Solución:

Tomando el lado izquierdo de la identidad:

$$\begin{aligned}
\frac{\csc(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\csc(\alpha)\sin(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)} \\
&= \frac{\frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)} && \text{Id. Recíproca} \\
&= \frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)} \\
&= \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)} && \text{Id. Pitagórica} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\
&= \tan(\alpha) && \text{Id. Recíproca}
\end{aligned}$$

5. Resolver los siguientes triángulos (Diapositiva 34)

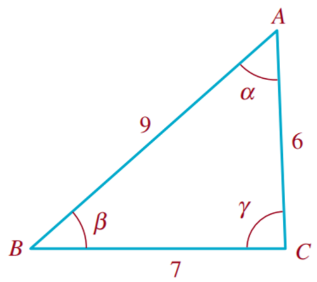

Figura 2: Primer triángulo a resolver

En el primer triángulo, nos faltan los tres ángulos. Por lo que aplicando teorema del coseno, para el ángulo α se tiene:

$$\begin{aligned}
7^2 &= 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha) \\
49 &= 81 + 36 - 108 \cdot \cos(\alpha) \\
-68 &= -108 \cdot \cos(\alpha) \\
\frac{17}{27} &= \cos(\alpha) \\
\cos^{-1}\left(\frac{17}{27}\right) &= \alpha \\
\alpha &\approx 50{,}98^\circ
\end{aligned}$$

Hacemos lo mismo para γ:

$$\begin{aligned}
9^2 &= 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\gamma) \\
81 &= 49 + 36 - 84 \cdot \cos(\gamma) \\
-4 &= -84 \cdot \cos(\gamma) \\
\frac{1}{21} &= \cos(\gamma) \\
\cos^{-1}\left(\frac{1}{21}\right) &= \gamma \\
\gamma &\approx 87{,}27^\circ
\end{aligned}$$

Por último, como los tres ángulos deben sumar 180°, podemos encontrar β

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 180 \\
50{,}98^\circ + \beta + 87{,}27^\circ &= 180 \\
\beta &\approx 41{,}75^\circ
\end{aligned}$$

Para el segundo triángulo, se tiene:

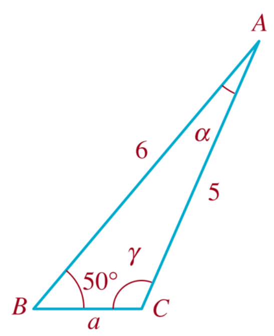

Figura 3: Segundo triángulo a resolver

En este caso, para resolver el triángulo, faltan dos ángulos y un lado. Los determinaremos con el Teorema del Seno:

$$\frac{\sin(50^\circ)}{5} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{6} \tag{3}$$

Tomamos de la primera y última igualdad de la ecuación 3:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(50^\circ)}{5} &= \frac{\sin(\gamma)}{6} \\
\frac{6}{5} \cdot \sin(50^\circ) &= \sin(\gamma) && \text{Aplicamos } \sin^{-1} \\
\sin^{-1}\left(\frac{6}{5} \cdot \sin(50^\circ)\right) &= \gamma \\
66{,}82^\circ &\approx \gamma
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos dos ángulos, podemos determinar el valor del tercer ángulo α:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 180 \\
\alpha + 50^\circ + 66{,}82^\circ &= 180 \\
\alpha &\approx 63{,}19^\circ
\end{aligned}
$$

Por lo que aplicamos el Teorema del Seno de la Ecuación 3 usando las dos primeras igualdades:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(50^\circ)}{5} &= \frac{\sin(\alpha)}{a} \\
a &= \frac{5\sin(\alpha)}{\sin(50^\circ)} \\
a &\approx 5{,}82 \text{ unidades de longitud}
\end{aligned}
$$