FACULTAD DE MEDICINA
UNIVERSIDAD DE CHILE

Vectores

Unidad de Biomatemáticas
Matemáticas I – Primer Semestre

Logros de Aprendizaje

1. Manejar las propiedades de los vectores de forma analítica y geométrica

2. Resolver problemas asociados a cantidades vectoriales.

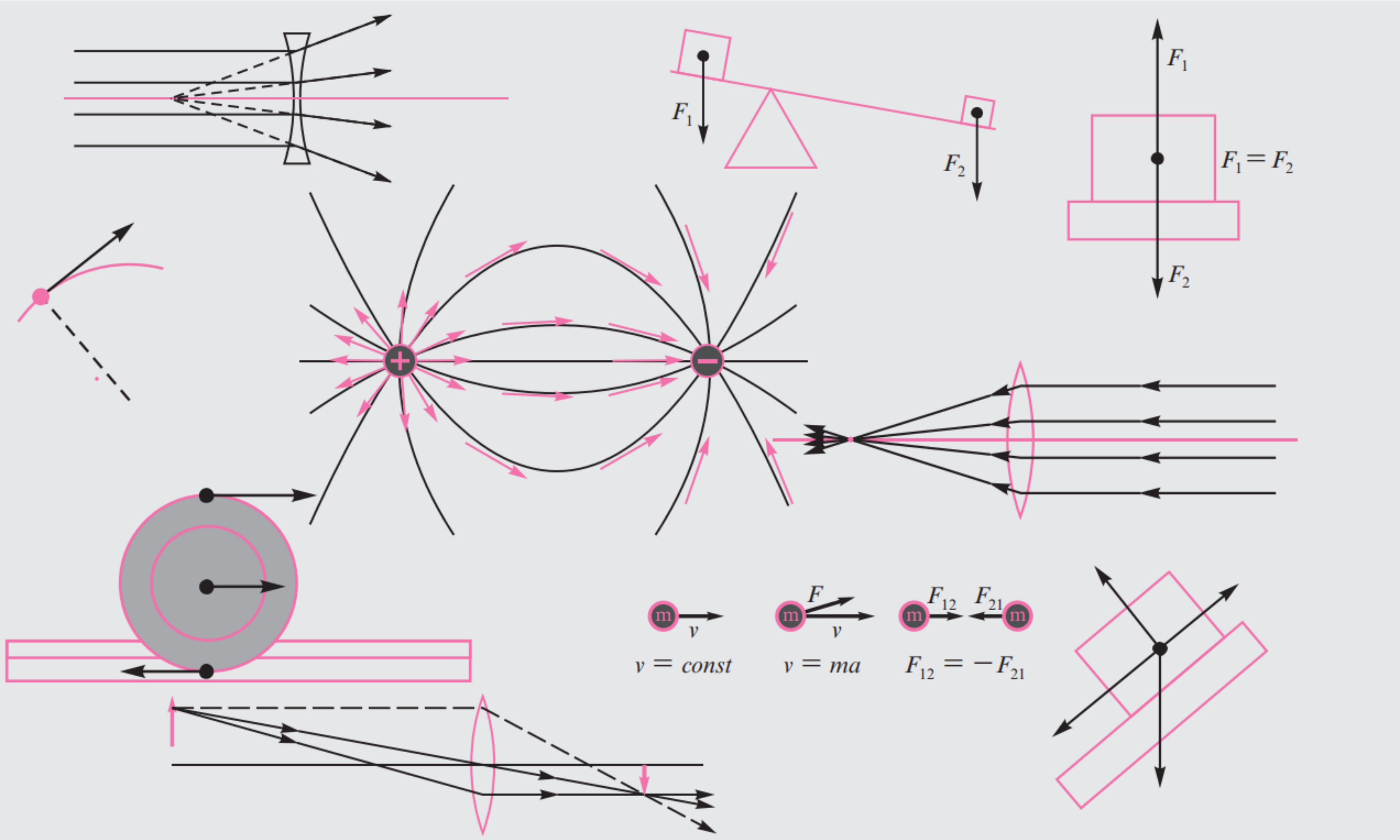
Contenidos

1. Vectores en $\mathbb{R}^2$
2. Operatoria con Vectores

¿Qué es un vector? - En Matemáticas

- En **Algebra Lineal** se define un **vector** como un elemento de un espacio vectorial.
- En **Estadística**, existen los vectores filas y vectores columnas, que no son más que matrices de dimensiones nx1 y 1xm respectivamente.
- En **Geometría**, un vector es un segmento de recta, contado a partir de un punto del espacio, cuya longitud representa a escala una magnitud, en una dirección determinada y en uno de sus sentidos

INTRODUCCIÓN



Los vectores se emplean en todos los ámbitos de la física para representar diversos fenómenos en disciplinas como mecánica, electricidad y magnetismo, óptica y mecánica de fluidos.

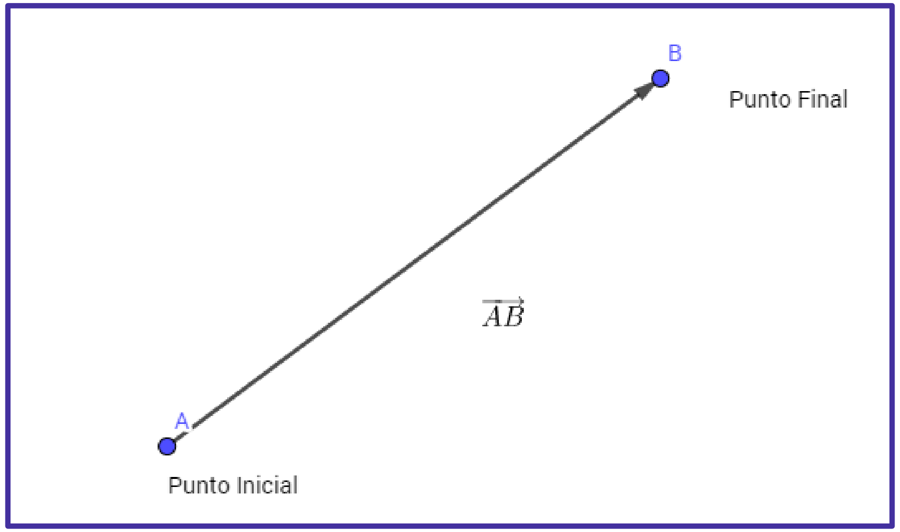
1.

Vectores en $\mathbb{R}^2$

Vectores fijos

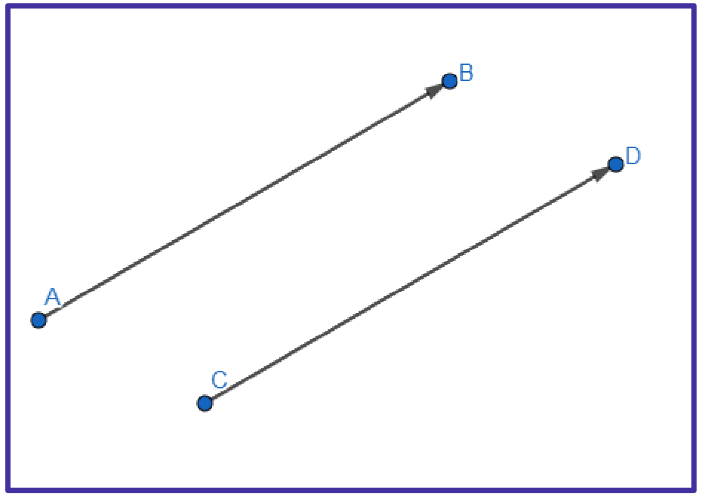
Cualquier par de puntos A, B del plano cartesiano determinan un segmento orientado o vector fijo $\overrightarrow{AB}$

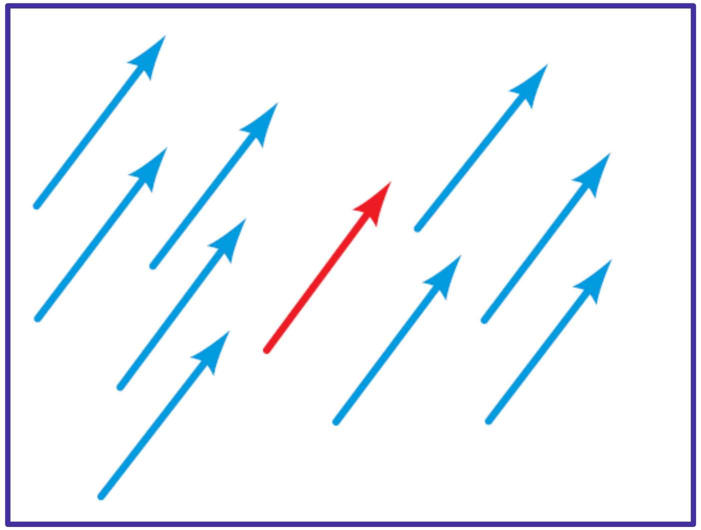
A es punto inicial y B punto final.



Vectores Equipolentes y Vectores Libres

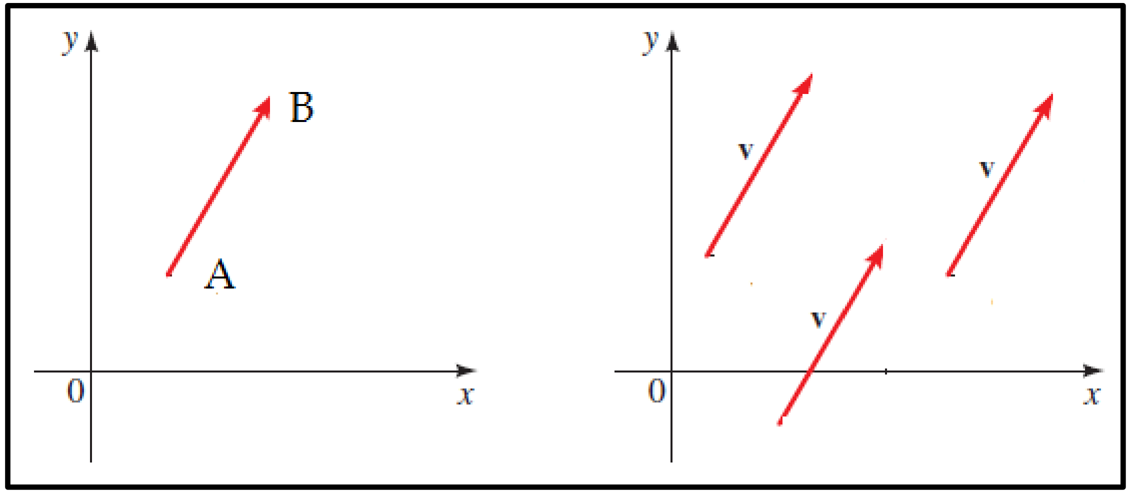
Si dos segmentos orientados , $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido, diremos que son vectores fijos equipolentes (o equivalentes). Todos los segmentos dirigidos equipolentes a un vector, se llaman Vectores Libres.



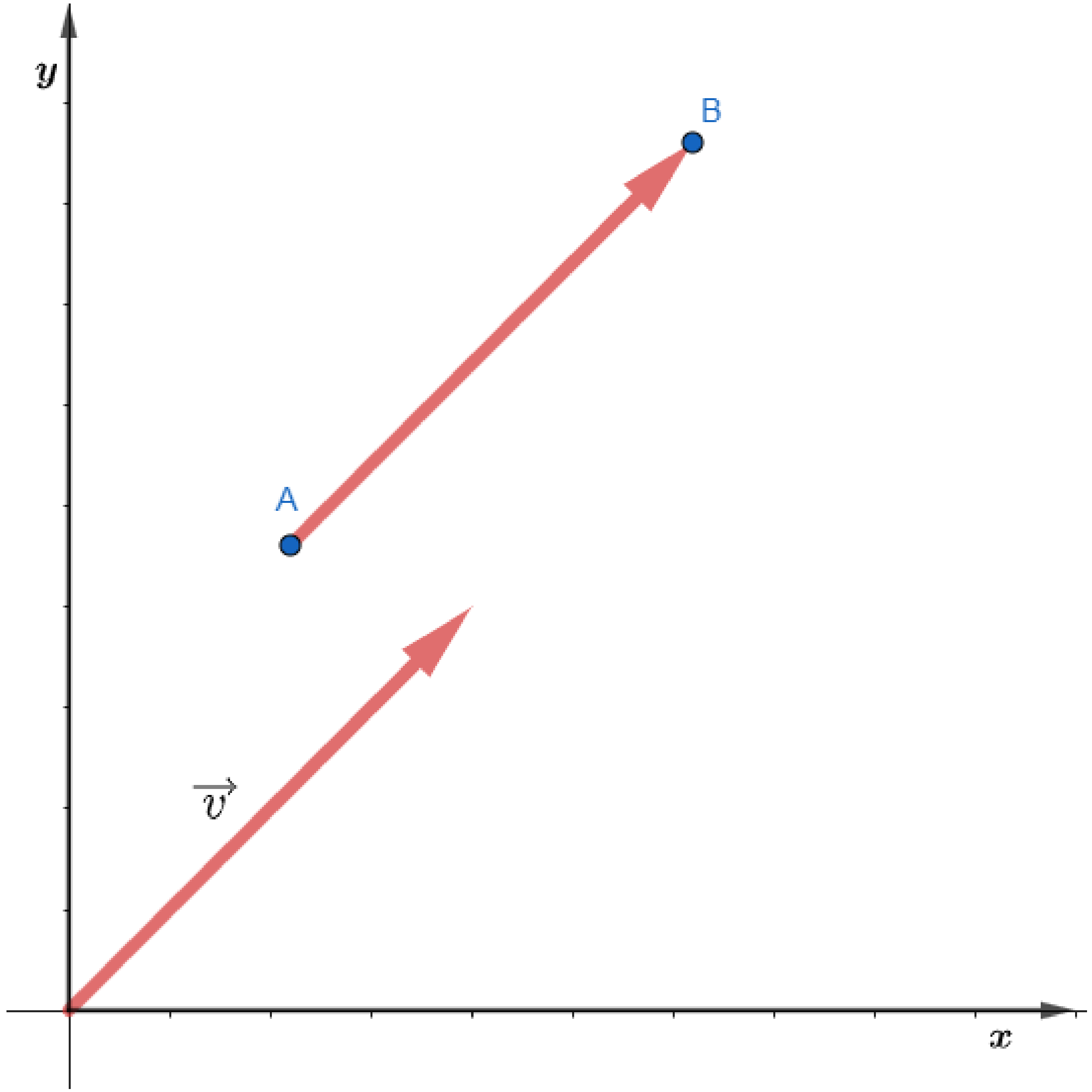


CONTENIDO

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ tiene una localización concreta , está fijado a un punto inicial y final. Pero un vector $\vec{v}$ no tiene localización concreta, está libre.

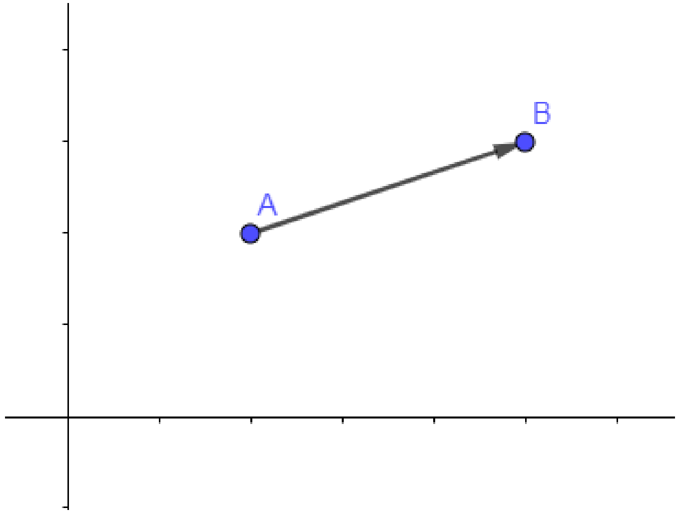


Si un vector $\vec{v}$ tiene su punto inicial en el origen del sistema de coordenadas, entonces se dice que está en ***posición estándar.***



Componentes de un Vector

Si un vector está representado en $\mathbb{R}^2$ con punto inicial $A = (a_1, a_2)$ y punto final $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ las componentes de $\overrightarrow{AB}$ son $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$



Luego

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

EJEMPLO

A. Encuentre las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ con punto inicial $(1, -4)$ y punto terminal $(-3,1)$
B. Dibuje el vector en posición estándar.

Uso del lenguaje con vectores

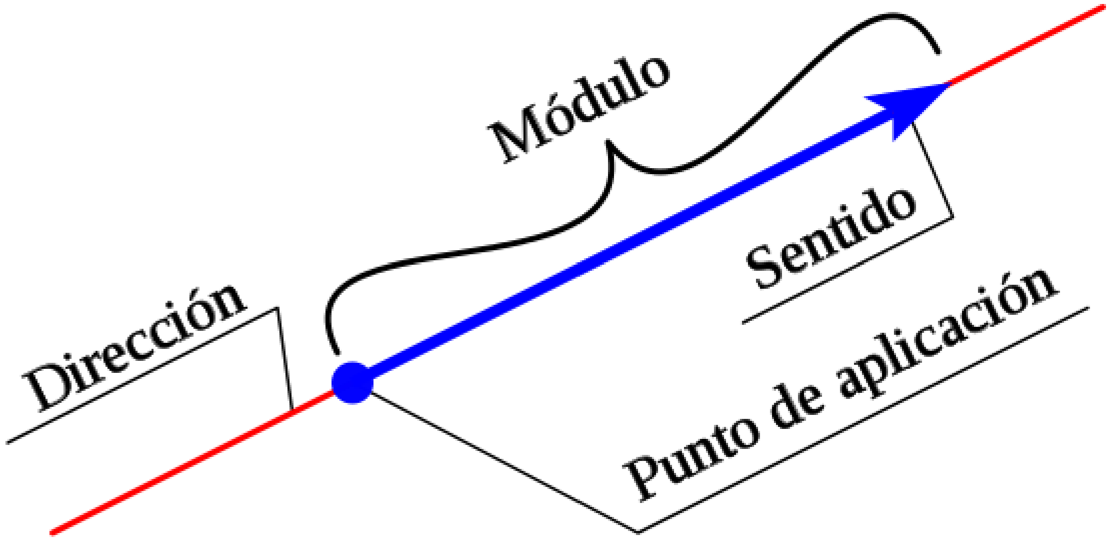
En negrita $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

En cursiva, con flecha $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ o $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ o $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

Módulo, Dirección y Sentido

- **Módulo**: la longitud del segmento expresado en términos de un valor numérico y una unidad.
- **Dirección**: el ángulo del vector con respecto al eje x.
- **Sentido**: la orientación del segmento, del origen al extremo del vector. Puede ser positivo o negativo.



Módulo

Para el vector fijo $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2\ )$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Para un vector libre $\vec{v} = (v_1, v_2\ )$

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

Si $|\vec{v}| = 0$ tenemos un vector nulo.

Si $|\vec{v}| = 1$ tenemos un vector unitario.

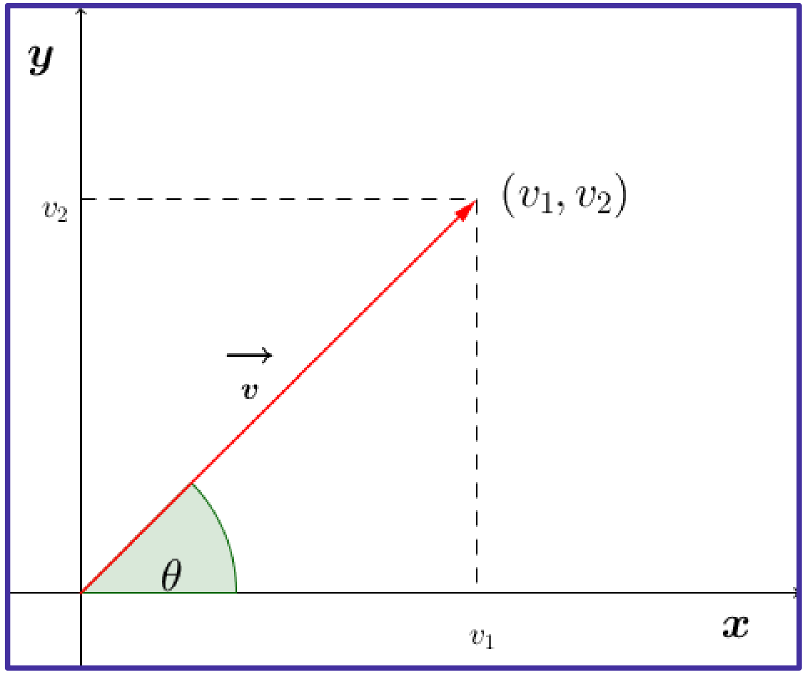
Dirección de un Vector

Sea $\vec{v}$ un vector en el plano en posición estándar.

La dirección de $\vec{v}$ es θ, un ángulo en posición estándar, positivo (en sentido antihorario) que se forma con el vector.

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$



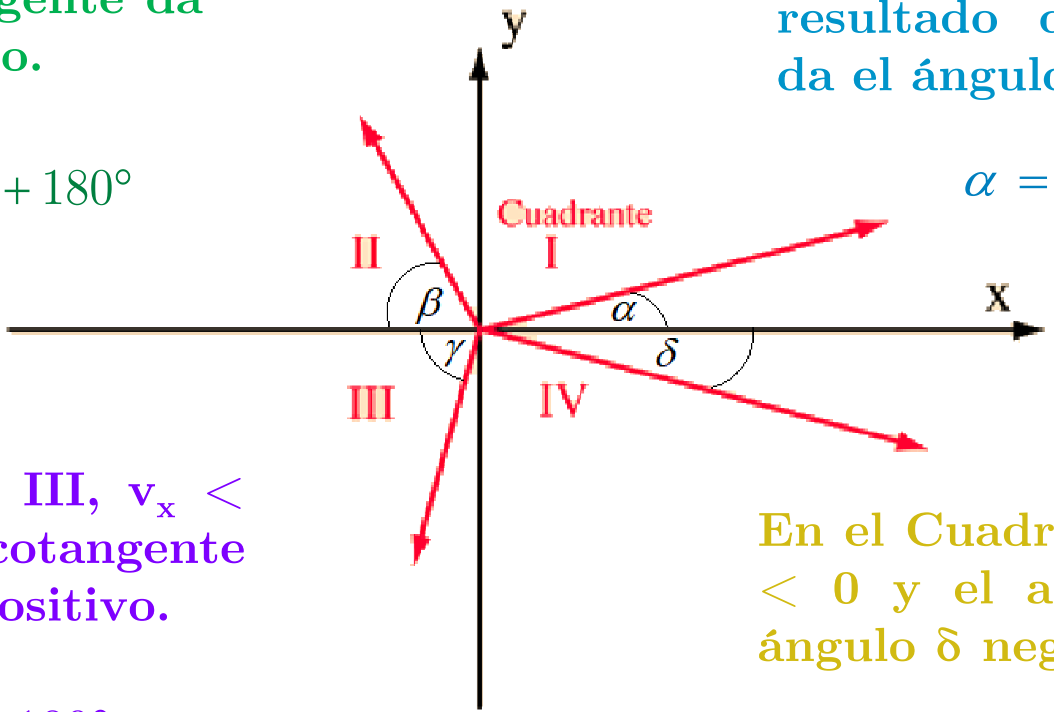
¿Y cómo se mide el ángulo en los otros cuadrantes?

En el Cuadrante II, $v_x < 0$, $v_y > 0$ y el arcotangente da un ángulo β negativo.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + 180°$$

En el Cuadrante I, el resultado del arcotangente da el ángulo buscado

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$



En el Cuadrante III, $v_x < 0$, $v_y < 0$ y el arcotangente da un ángulo γ positivo.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + 180°$$

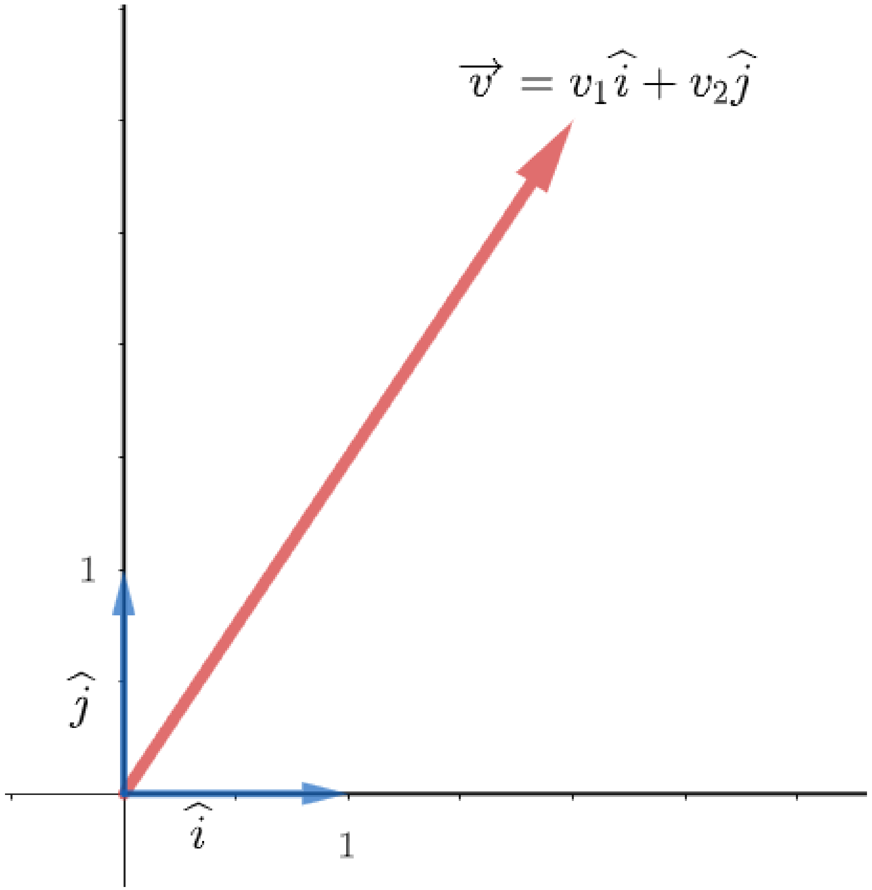
En el Cuadrante IV, $v_x > 0$, $v_y < 0$ y el arcotangente da un ángulo δ negativo.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + 360°$$

EJEMPLO

Para el vector $\overrightarrow{AB}$ con punto inicial $(1,-4)$ y punto terminal $(-3,1)$. Determine módulo y dirección

Vectores unitarios. Base Canónica



$\hat{\imath} = (1, 0)$ y $\hat{\jmath} = (0, 1)$

Cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base canónica.

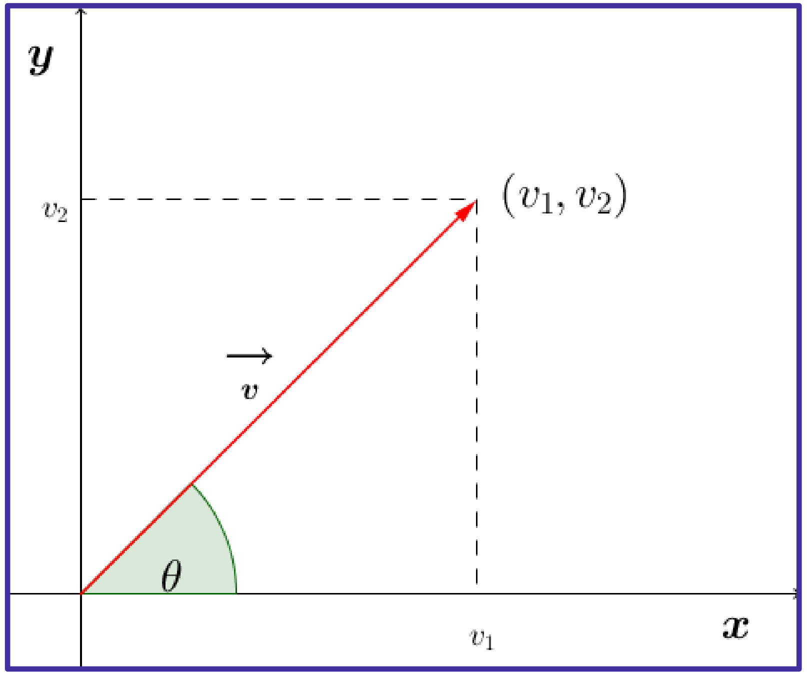
$$\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath}$$

Descomposición de un Vector en el Plano

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector cualquiera. Éste puede descomponerse en su parte horizontal y su parte vertical como sigue:

$$cos(\theta) = \frac{v_1}{|\vec{v}|} \qquad sen(\theta) = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$

$$\boxed{|\vec{v}| \cdot cos(\theta) = v_1} \qquad \boxed{|\vec{v}| \cdot sen(\theta) = v_2}$$



EJEMPLO

Sea el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ que tiene magnitud 8 y dirección $\frac{\pi}{3}$. Calcular sus componentes.

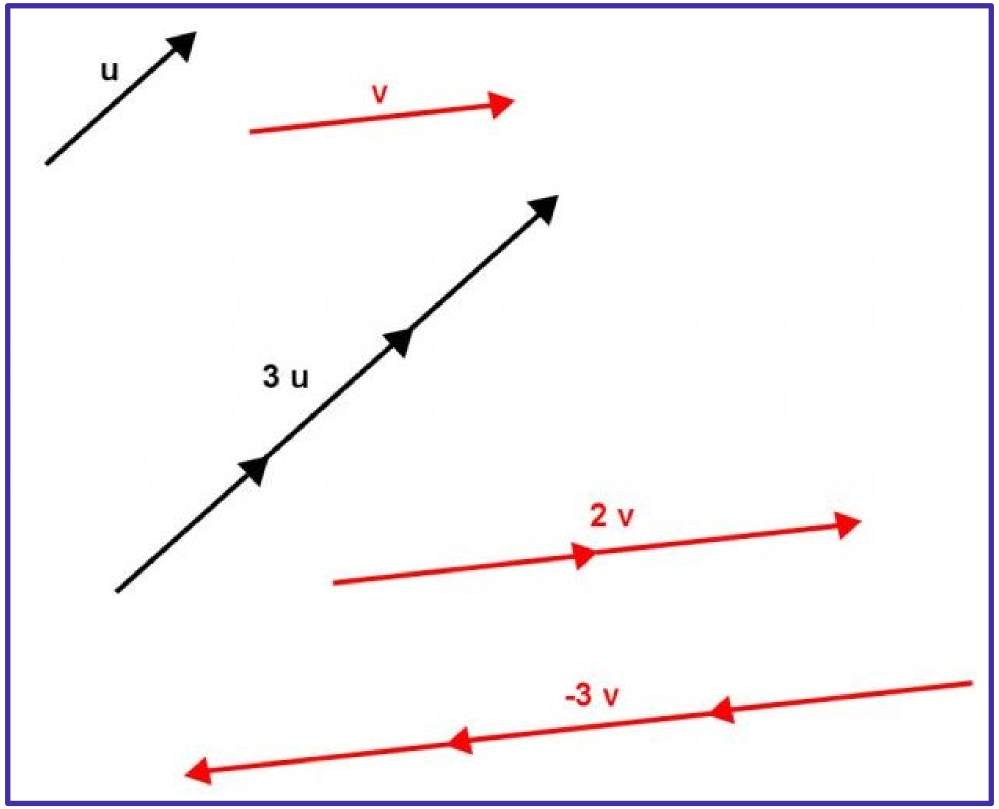
2.

Operaciones Vectoriales

Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector $\vec{v}$ por un escalar k se define como el vector que tiene:

1. Modulo igual a $|k|$ veces el modulo de $\vec{v}$
2. La misma dirección que $\vec{v}$
3. El mismo sentido que $\vec{v}$ si $k > 0$ y el sentido opuesto al de $\vec{v}$ si $k < 0$

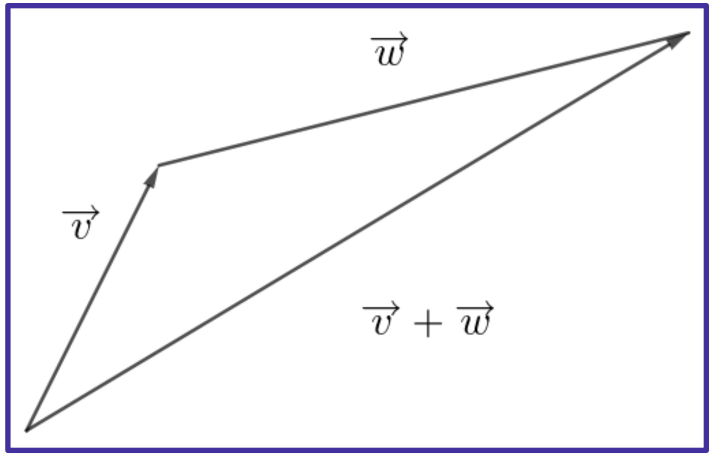


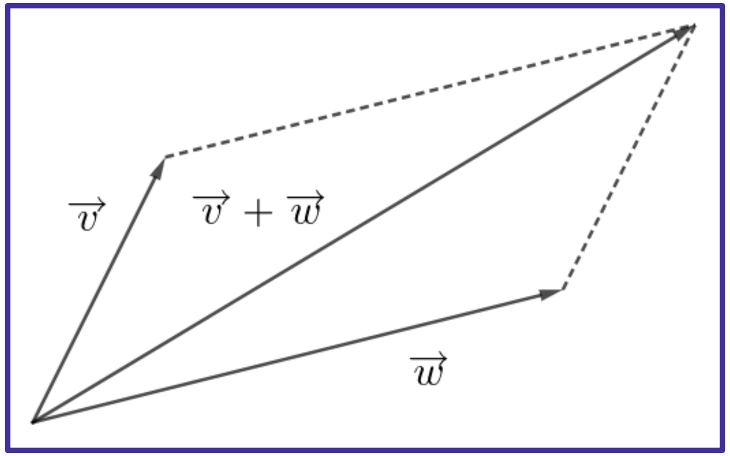
$$\mathbf{1}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \qquad \mathbf{0}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Suma de Vectores

Dados los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

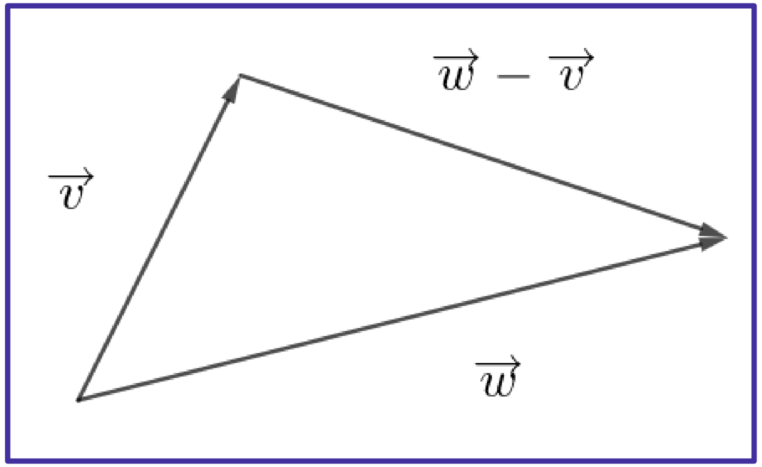


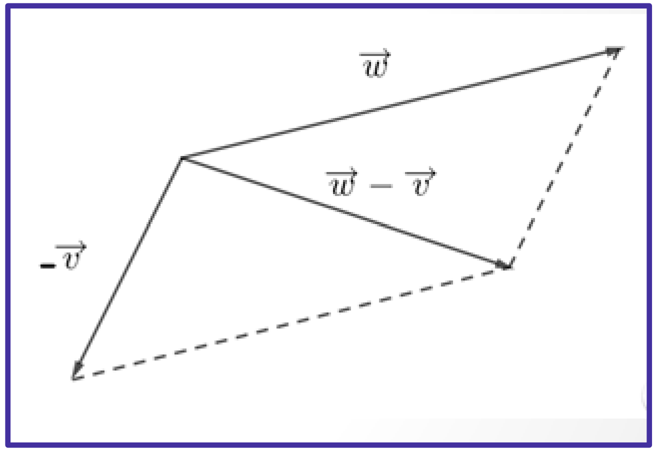


Diferencia de Vectores

Dados los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2\ )\ y\ \vec{w} = (w_1, w_2\ )$

$$\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v})$$





Propiedades del producto por un escalar y de la adición de vectores

Conmutatividad $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Asociativa $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Elemento neutro $\vec{0} = (0{,}0) \quad \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

Elemento opuesto $-\vec{v}$ $\quad \vec{v} + -\vec{v} = \vec{0}$

Distributiva $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

Distributiva $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

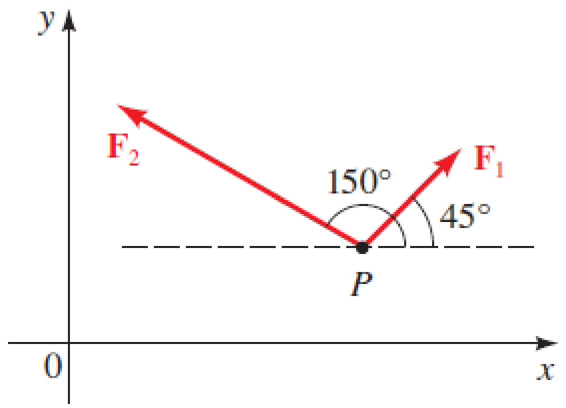
$$1\vec{u} = \vec{u} \quad y \quad 0\vec{u} = \vec{0}$$

EJEMPLO

Si $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ y $\vec{w} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$. Calcular $2\vec{v} - 4\vec{w}$

EJEMPLO

Dos fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ con magnitudes de 4,5 kg y 9 kg respectivamente actúan sobre un cuerpo en un punto *P* como se ve en la figura.



¿Cuál es la fuerza resultante que actúa en P?
Calcúlela y grafíquela

Hint: Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, la fuerza resultante experimentada por el cuerpo es la suma vectorial de estas fuerzas

ACTIVIDAD

Determine un vector unitario en la misma dirección que el vector $\vec{v} = (3,5)$

ACTIVIDAD

Copia, en tu cuaderno, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Luego, representa gráficamente:

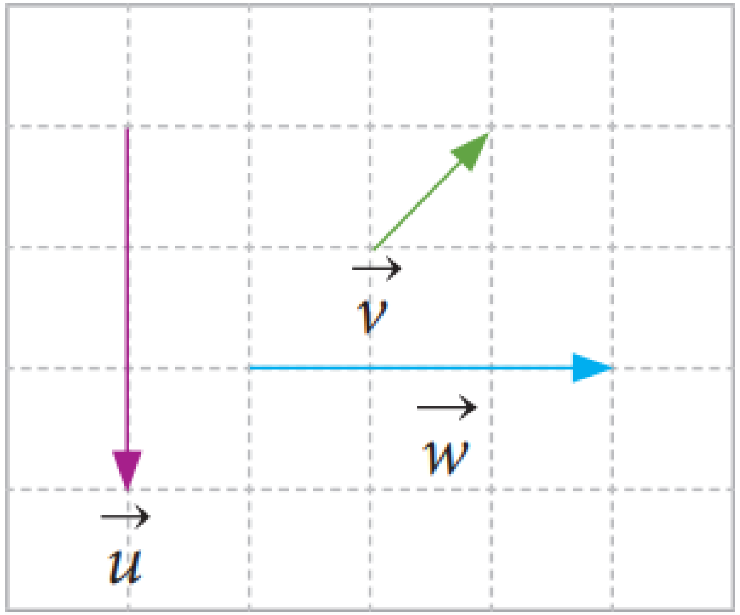
a. $\vec{u} + \vec{v}$

b. $3\vec{v}$

c. $2\vec{u} - \vec{v}$

d. $\vec{v} - 2\vec{w}$

e. $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$



Producto Escalar o Producto Punto

Dados los vectores:

$$\vec{u} = (u_1, u_2\ )\ y\ \ \vec{v} = (v_1, v_2\ )$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

CONTENIDO

Propiedades del Producto Escalar

1. Conmutativa $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2. Distributiva $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
3. Asociativa $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$

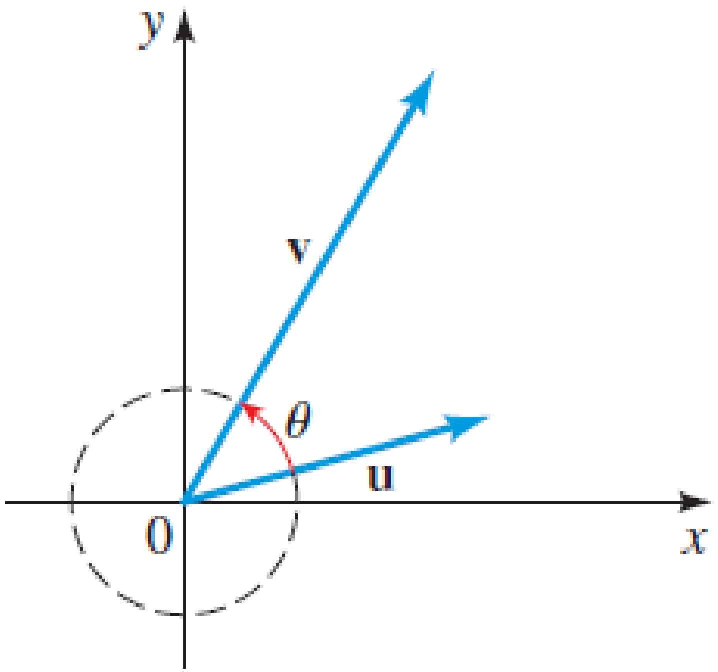
EJEMPLO

Si $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ y $\vec{w} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$. Calcular $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Ángulo entre dos vectores

Si θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ es el ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano , entonces :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



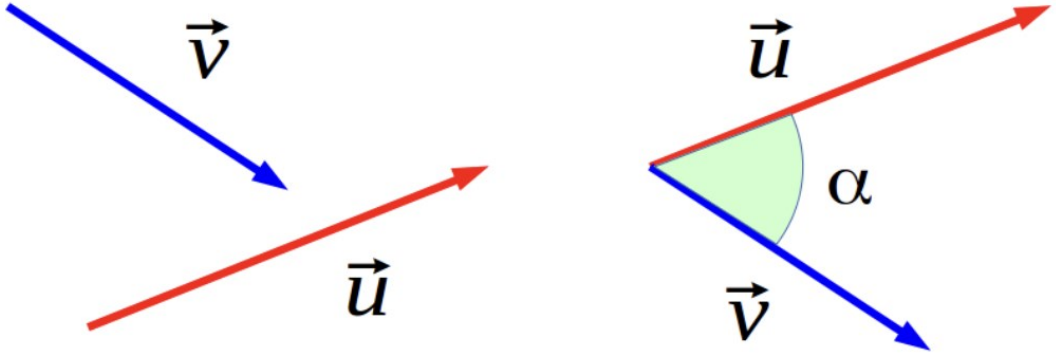
Producto Escalar o Producto Punto

Dados los vectores:

$$\vec{u} = (u_1, u_2\,)\ y\ \ \vec{v} = (v_1, v_2\,)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Producto escalar de dos vectores



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

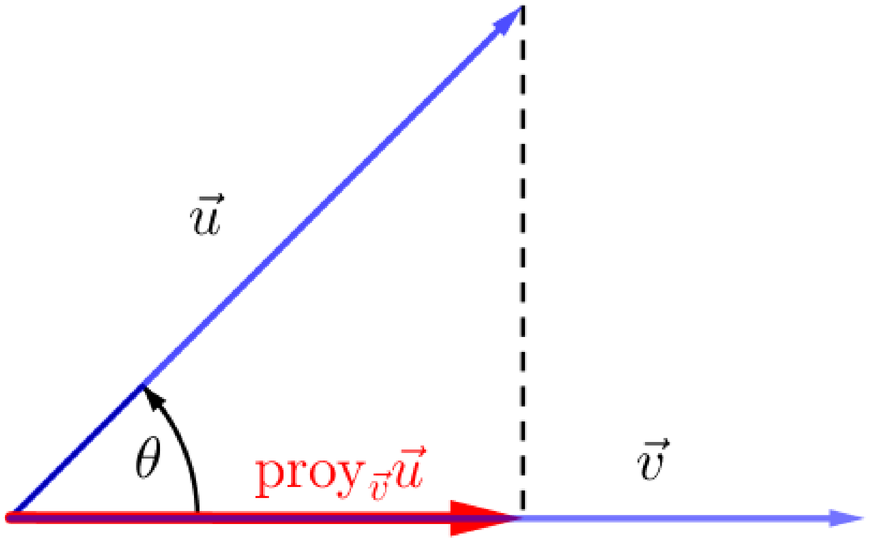
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

EJEMPLO

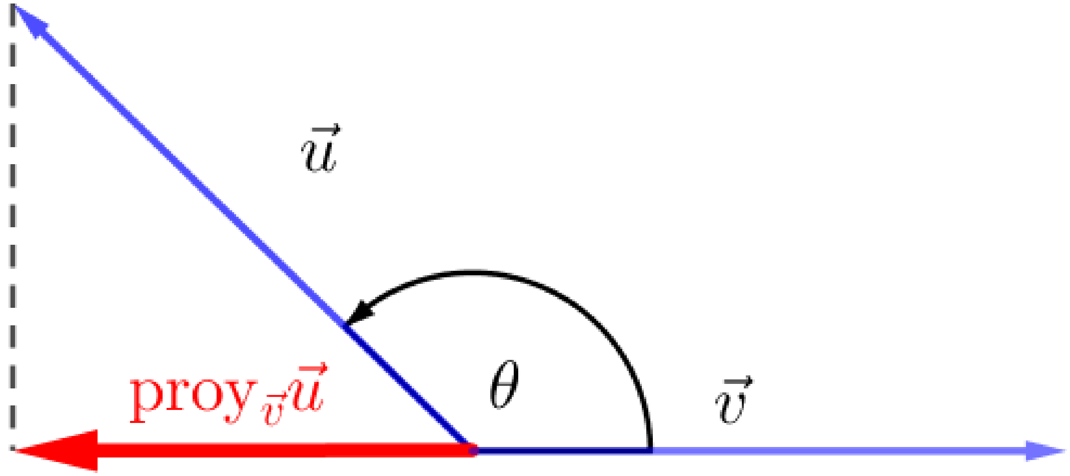
Encuentre el ángulo entre los vectores $\vec{v} = (2,5)$ y $\vec{w} = (4,-3)$

CONTENIDO

Proyección de vectores



$$\text{Longitud} = |\vec{u}|\cos\theta$$



$$\text{Longitud} = -|\vec{u}|\cos\theta$$

CONTENIDO

El **vector proyección** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es el vector:

$$proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

El **componente escalar** de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ es el escalar

$$|\vec{u}|\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

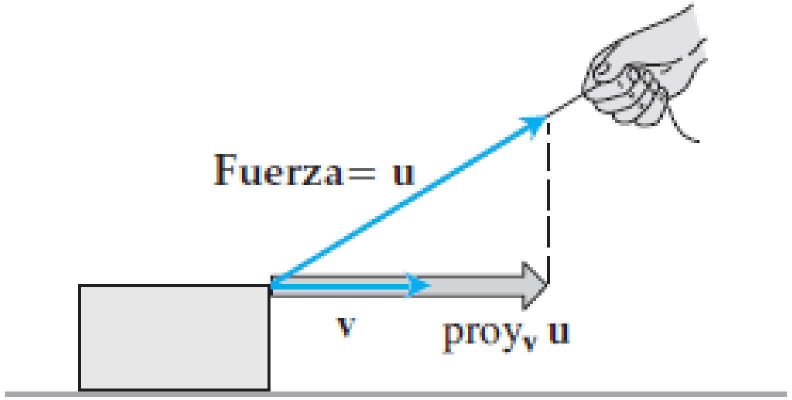


FIGURA 12.24 Si tiramos de la caja con una fuerza **u**, la fuerza efectiva que mueve la caja en la dirección **v** es la proyección de **u** sobre **v**.

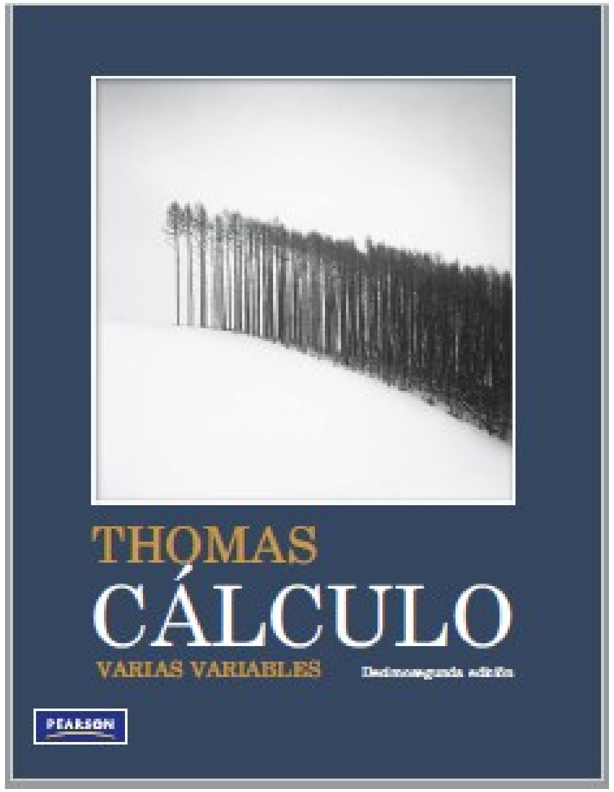
Vectores Paralelos y Ortogonales

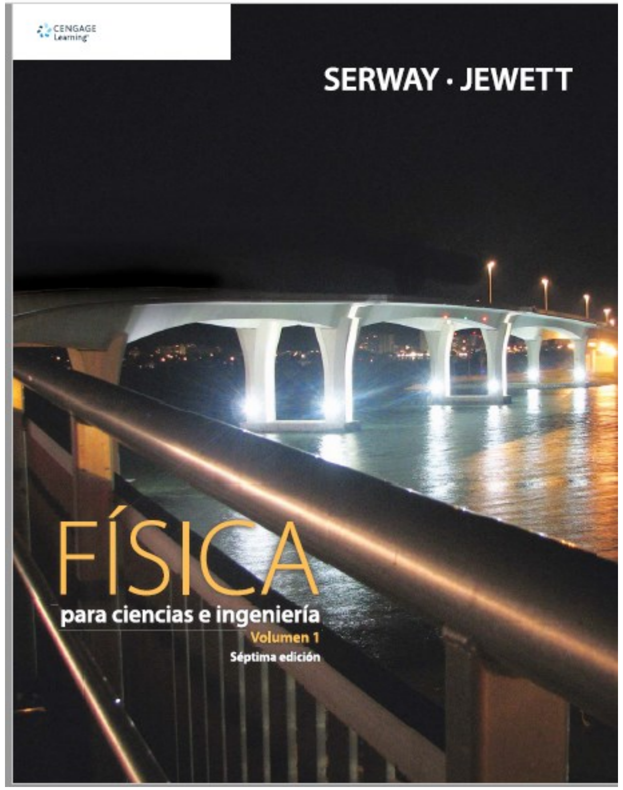
Dos vectores se dicen ***Paralelos*** si están contenidos en la misma recta que pasa por el origen. Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son paralelos, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{v} = k\overrightarrow{w}$$

Dos vectores se dicen ***Ortogonales*** si están contenidos en rectas perpendiculares que pasan por el origen. $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores ortogonales, si y solo si

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$$


THOMAS
CÁLCULO
VARIAS VARIABLES
PEARSON


CENGAGE Learning
SERWAY · JEWETT
FÍSICA
para ciencias e ingeniería
Volumen 1
Séptima edición

¿Preguntas?