Soluciones Actividad Autónoma

APLICACIÓN DE LA DERIVADA AL TRAZADO DE CURVAS

1. Para $\boldsymbol{a = 3}$ y para $\boldsymbol{a = 1}$.

2. Tabla 1: c, Tabla 2: b, Tabla 3: d, Tabla 4: a

3. Necesitamos una función que al menos sea dos veces derivable y tal que $f''(x)$ *no es una constante*, ya que la concavidad va variando, dependiendo de los valores de x. Es decir, necesitamos una función de al menos tercer grado.

Sea:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \text{ número reales.}$$

Derivando:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{y} \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

A partir de la tabla sabemos que:

$$f(2) = 1 \ ; \ f'(2) = 0 \ ; \ f''(2) > 0$$
$$f(4) = 4 \ ; \ f'(4) > 0 \ ; \ f''(4) = 0$$
$$f(6) = 7 \ ; \ f'(6) = 0 \ ; \ f''(6) < 0$$

Podemos obtener:

$$f''(4) = 0 \Longrightarrow 6a(4) + 2b = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{b = -12a}$$

Por lo que podemos reescribir la función y la derivada de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^3 - 12ax^2 + cx + d, \text{ con } a, c, d \text{ número reales.}$$

Y su derivada:

$$f'(x) = 3ax^2 - 24ax + c$$

Además, se obtiene la siguiente relación:

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow 3a(2)^2 - 24a(2) + c = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{c = 36a}$$

Nuevamente podemos reescribir la función de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^3 - 12ax^2 + 36ax + d, \text{ con } a, d \text{ números reales.}$$

Luego,

$$f(2) = 1 \Longrightarrow a(2)^3 - 12a(2)^2 + 36a(2) + d = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{d = 1 - 32a}$$

Posteriormente nos queda toda la función dependiendo de a:

$$f(x) = ax^3 - 12ax^2 + 36ax + (1 - 32a) \text{ , con } a \text{ número real}$$

Basta con usar alguna relación descrita anteriormente, en este caso

$$f(4) = 4 \Longrightarrow a(4)^3 - 12a(4)^2 + 36a(4) + (1 - 32a) = 4 \Longrightarrow \boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$$

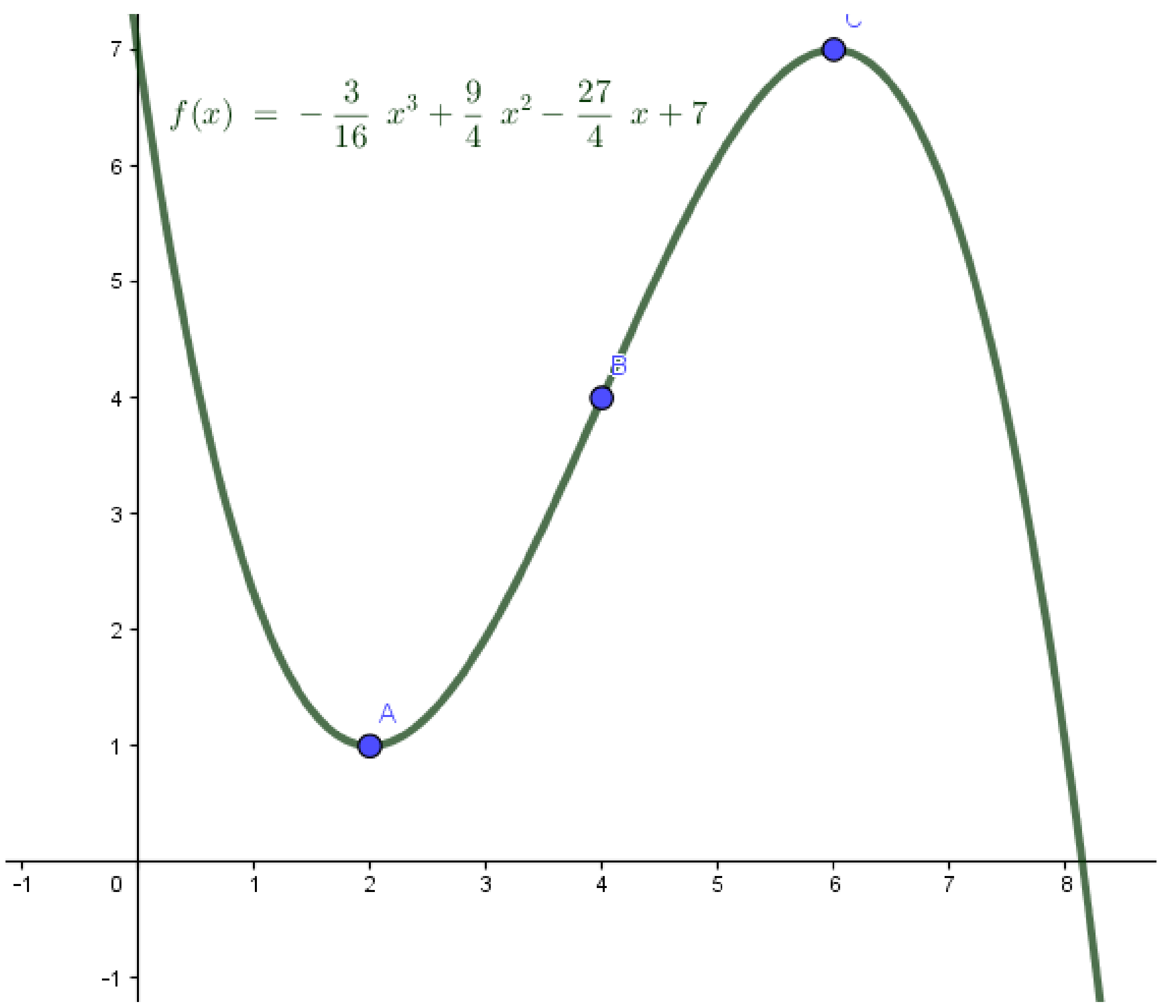
Finalmente usando las relaciones obtenidas: entre a, b, c y d, resulta:

$$b = \frac{9}{4} \qquad c = -\frac{27}{4} \qquad d = 7$$

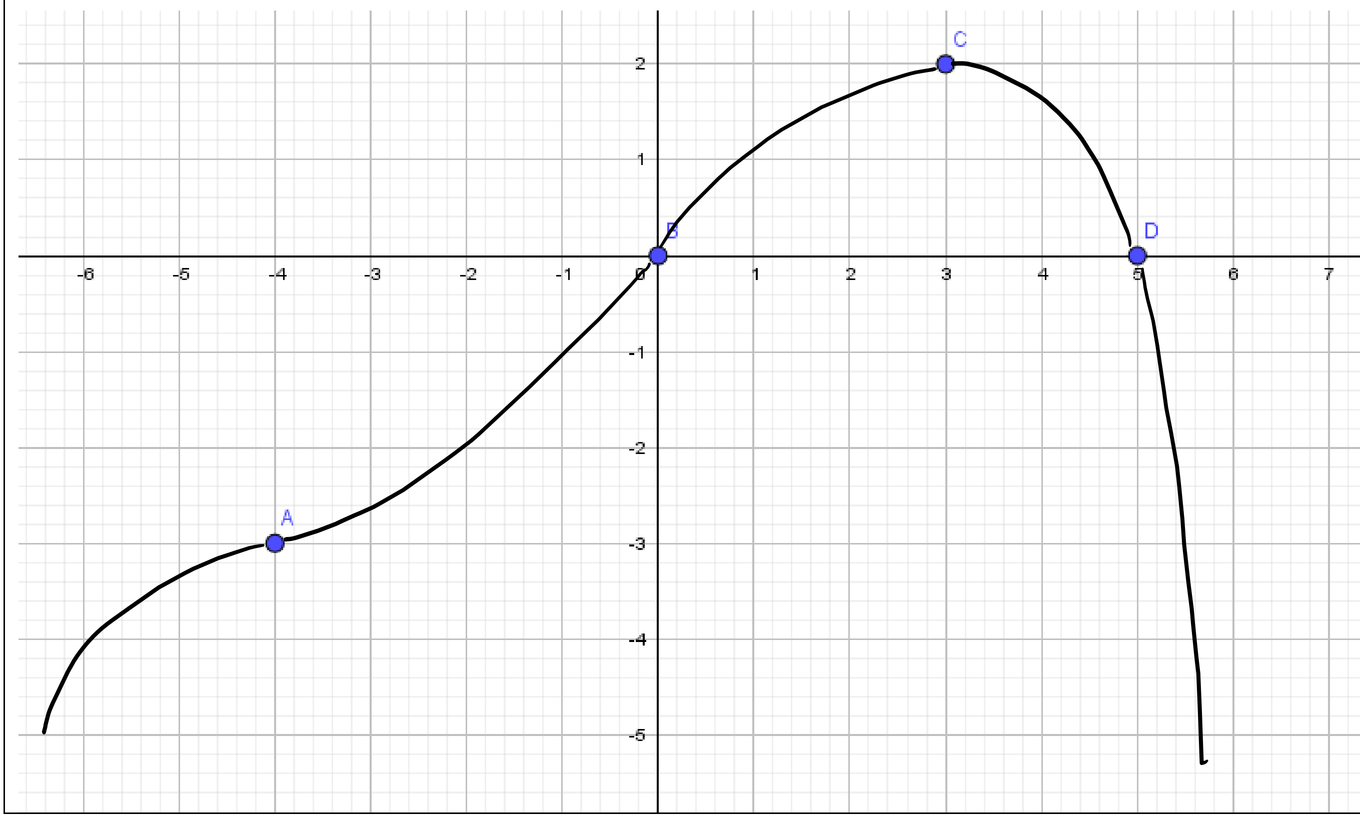
Por lo que la ecuación finalmente queda:

$$f(x) = -\frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{4}x + 7$$

Observación: esta es una función que cumple con esa condición, pueden existir otras.



4.



5. Para cada una de las siguientes funciones…

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x^2+1}}$

i) $x = 0$

ii) $Máximo$: $(0,2)$

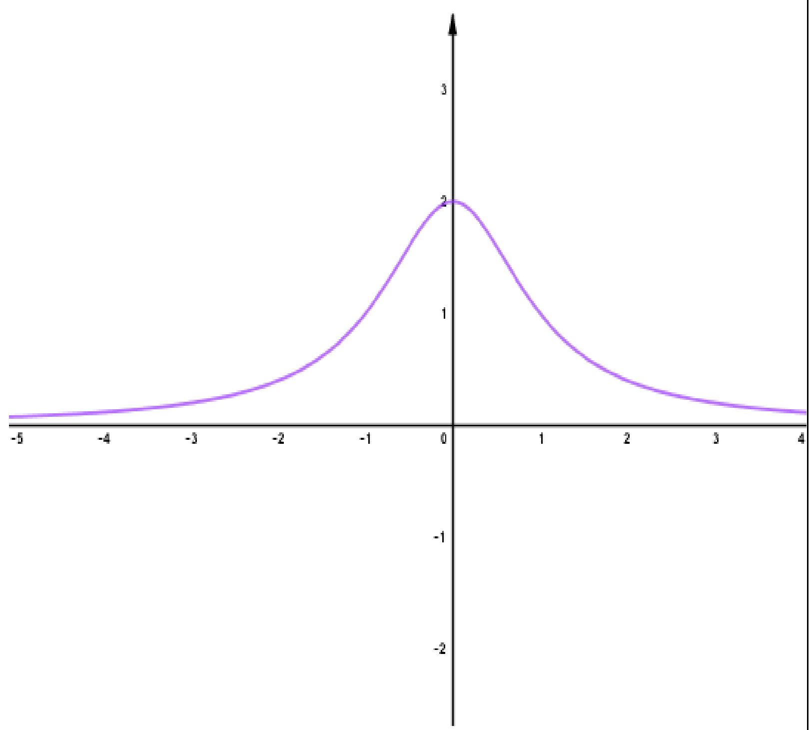
iii) $Crecimiento$: $]-\infty, 0[$

$Decrecimiento$: $]0, +\infty[$

iv) $Inflexión$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$

v) $Negativa$: $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

$Positiva$: $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$



b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+1}{x}}$

i) $x = 0$ y $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

ii) $Mínimo: \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$

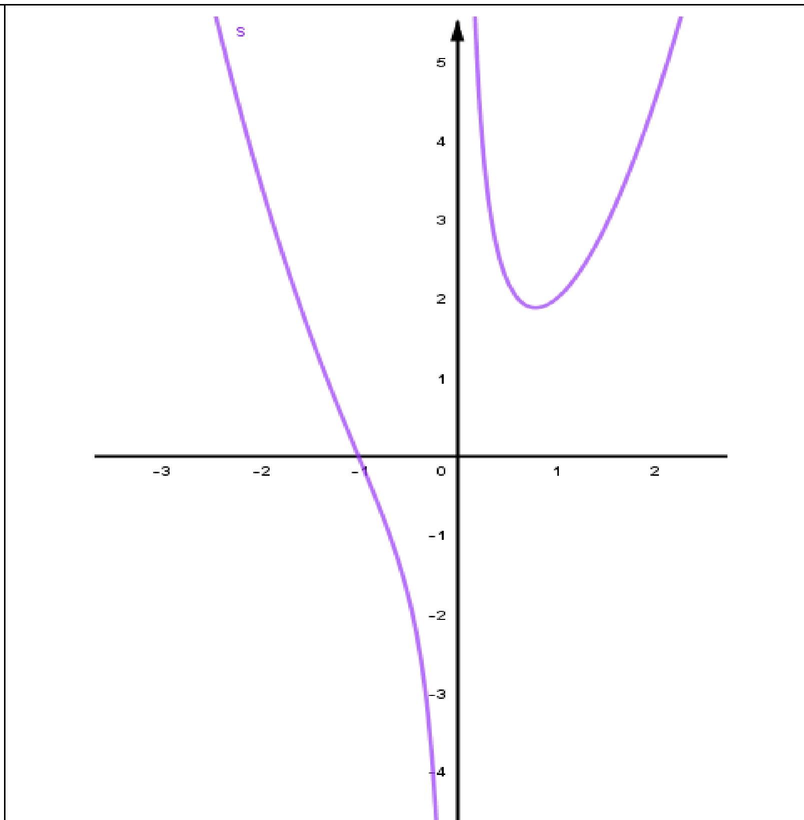
iii) $Crecimiento: \left]\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$

$Decrecimiento:]-\infty, 0[\cup \left]0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right[$

iv) $Inflexión: (-1,0)$

v) $Negativa:]-1,0[$

$Positiva:]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$



c) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}}$

i) $x = -1$ $x = 1$ (Puntos fronteras)

ii) Mínimo $(-1,0)$ y $(1,0)$

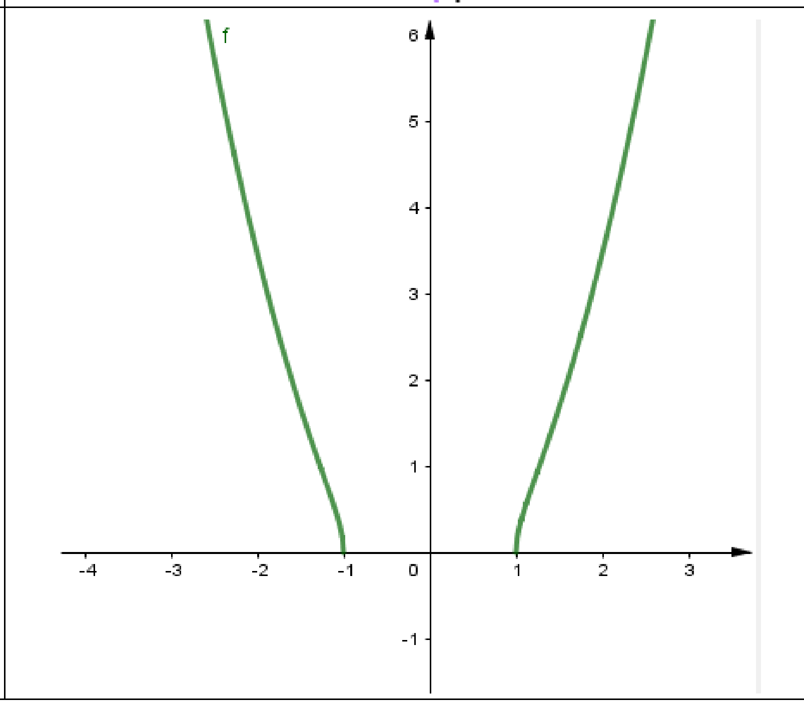
iii) $Decrecimiento:]-\infty, -1[$

$Crecimiento:]1, +\infty[$

iv) $Inflexión: \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

v) $Negativa: \left]-\frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right[\cup \left]1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$

$Positiva: \left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$



6. Sean x e y los números

$$x \cdot y = -16 \Rightarrow y = \frac{-16}{x}$$

$$sea\ f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x) = x^2 + \left(\frac{-16}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{256}{x^2}$$

Luego, con el criterio de la segunda derivada tenemos que $x = 4$ e $y = -4$ para que la suma de sus cuadrados sea mínima.

7. $p = e^{-\frac{1}{2}}$

8. $Las\ dimensiones\ tienen\ que\ ser\ 22{,}15\ cm\ ,12{,}15\ cm\ \ y\ 3{,}9\ cm$

9. $Las\ dimensiones\ deben\ ser\ \left(8 + 10\sqrt{10}\right)\ cm\ y\ \left(5\sqrt{10} + 4\right)\ cm$

10. a) Alto: $\frac{25}{6}\sqrt[3]{18}$ Largo: $10\sqrt[3]{18}$ Ancho: $\frac{10}{3}\sqrt[3]{18}$

b) Aproximadamente \$343.415 (Valor exacto: $\frac{900000}{\sqrt[3]{18}}$)

11. a) $x = \frac{a}{2}$

b) El valor máximo de v es $\frac{ka^2}{4}$