Actividades Clase 05
Razón de Cambio

---

1. (Diapositiva 15) Obtenga la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4-x}$ en el punto $(-5, 3)$.

   Primero encontramos la pendiente de la recta tangente utilizando la derivada de la función evaluada en $x = -5$:

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$
$$f'(-5) = \frac{-1}{2\sqrt{4-(-5)}} = -\frac{1}{6}$$

   Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-5, 3)$ es $-\frac{1}{6}$. Luego, encontramos la ecuación de la recta tangente usando la fórmula punto-pendiente:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$
$$y = -\frac{1}{6}(x+5) + 3$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{6}$$

   Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-5, 3)$ es $y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{6}$.

   Para encontrar la ecuación de la recta normal, primero encontramos su pendiente, la cual es el negativo del inverso de la pendiente de la recta tangente:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 6$$

   Luego, encontramos la ecuación de la recta normal también usando la fórmula punto-pendiente:

$$y = m_n(x - x_0) + y_0$$
$$y - 3 = 6(x+5)$$
$$y = 6x + 33$$

   Por lo tanto, la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-5, 3)$ es $y = 6x+33$.

2. (Diapositiva 20) La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo está dada por la función $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$, con s en metros y t en segundos. Determine:

   a) Velocidad al inicio del movimiento.

   Para encontrar la velocidad al inicio del movimiento, encontramos la derivada de la función $s(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= t^3 - 9t^2 + 24t + 2 \\ s'(t) &= 3t^2 - 18t + 24 \end{aligned}$$

   Luego, evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$\begin{aligned} s'(0) &= 3(0)^2 - 18(0) + 24 \\ &= 24 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la velocidad al inicio del movimiento es 24 m/s.

   b) Posición y velocidad de la partícula cuando $a(t) = 0$.

   Para encontrar la posición y velocidad de la partícula cuando $a(t) = 0$, primero encontramos la aceleración de la partícula, que es la derivada segunda de la función $s(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= t^3 - 9t^2 + 24t + 2 \\ s''(t) &= 6t - 18 \end{aligned}$$

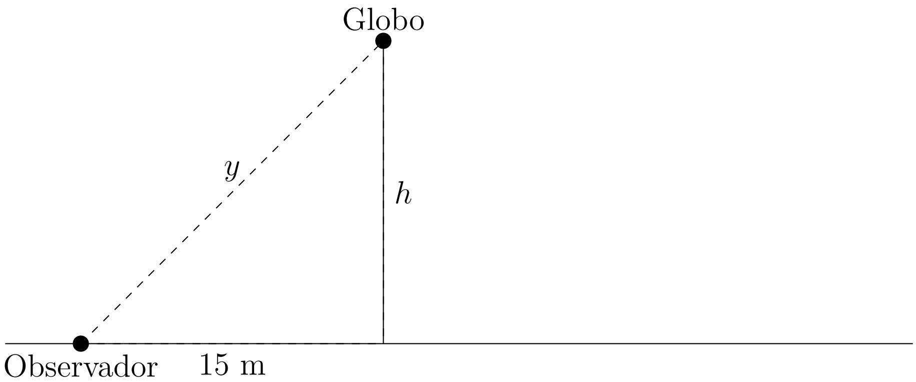
   Luego, igualamos la aceleración a cero y resolvemos para t:

$$\begin{aligned} 6t - 18 &= 0 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, cuando $a(t) = 0$, la partícula está en la posición $s(3) = 2$ metros y su velocidad es $s'(3) = 9$ m/s.

3. (Diapositiva 26) Se suelta un pequeño globo en un punto a 15m alejado de un observador, quien se encuentra a nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a una velocidad de 8 m/s, ¿Qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a 50m de altura?

   Para resolver el problema, podemos utilizar razones de cambio relacionadas. Sea y la distancia entre el globo y el observador en un momento dado, y sea h la altura del globo en ese mismo momento.



   Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$y^2 = h^2 + 15^2$$
$$y = \sqrt{h^2 + 15^2}$$

   Tomando la derivada con respecto al tiempo t, obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{h^2 + 15^2}} \cdot 2h \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 15^2}} \cdot \frac{dh}{dt}$$

   Sabemos que $\frac{dh}{dt} = 8$ m/s cuando $h = 50$ m, por lo que reemplazando en nuestra derivada tenemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{\sqrt{50^2 + 15^2}} \cdot 8 \approx 7.66 \text{ m/s}$$

   Por lo tanto, la distancia del observador al globo está aumentando a una velocidad de aproximadamente 7.66 m/s cuando el globo se encuentra a una altura de 50 m.

4. (Diapositiva 27) Un cubo de hielo de 10 cm^3 de volumen, comienza a derretirse a razón de 6 cm^3/s. ¿Cuál es la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante?

   Se tienen los siguientes datos:

$$V = 10\ cm^3$$
$$\frac{dV}{dt} = -6\ cm^3/s$$

   Sea la arista del cubo a y su superficie S, como el volumen del cubo, está dado por $V = a^3$ podemos determinar el valor de su arista:

$$a = \sqrt[3]{10}$$

   Por otro lado, usando razones de cambio relacionadas, se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt}$$

   Con $\frac{dV}{da} = 3a^2$. Esta derivada se puede interpretar "*como cambia el volumen, con respecto a su arista*". Por lo que reemplazando en la fórmula anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt} \\ -6 &= 3a^2 \cdot \frac{da}{dt} \\ \frac{da}{dt} &= \frac{-6}{3a^2} \end{aligned}$$

   Como el valor de a es conocido, entonces:

$$\frac{da}{dt} = \frac{-6}{3(\sqrt[3]{10})^2} = \frac{-2}{(\sqrt[3]{10})^2}$$

   Esto nos servirá, ya que el enunciado pregunta por cómo cambia la superficie con respecto al tiempo, es decir $\frac{dS}{dt}$. Usando razones de cambio relacionadas, tenemos:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{da} \cdot \frac{da}{dt}$$

   Luego, la superficie del cubo es $S = 6a^2$, por lo que su razón de cambio con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 12a \cdot \frac{da}{dt} \\ &= 12 \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \frac{-2}{(\sqrt[3]{10})^2} \\ &\approx -11,14 \end{aligned}$$

   Es decir, la superficie del cubo se reduce a una velocidad de aproximadamente 11,14 cm^2/s.