FACULTAD DE MEDICINA
UNIVERSIDAD DE CHILE

Función Logarítmica

Unidad de Biomatemáticas
Matemáticas I – Primer Semestre

Logros de Aprendizaje

1. Reconocer y evaluar funciones logarítmicas.
2. Graficar funciones logarítmicas.
3. Utilizar propiedades de los logaritmos.
4. Determinar derivadas de la Función Logarítmica
5. Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas del área de la salud.

Contenidos

1. Función Logarítmica

1. Propiedades y derivadas de los logaritmos

2. Aplicaciones

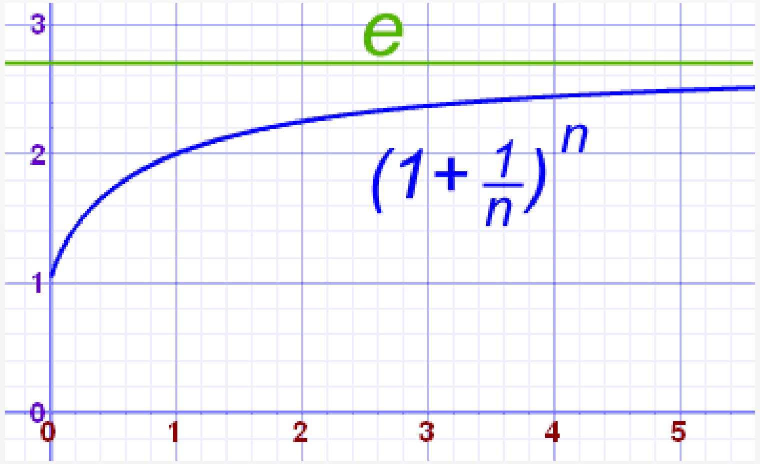
Clasificación de Funciones

- Funciones
  - Funciones Algebraicas
    - Polinómicas
    - Racionales
    - Radicales
  - Funciones Trascendentes
    - Trigonométricas
    - Exponenciales
    - Logarítmicas

El número de Euler

- ***e*** es un número irracional (no se puede escribir como una fracción simple).

- ***e*** es la base de los logaritmos naturales (inventados por John Napier).



e ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995...

El número de Euler

Hay muchas formas de calcular el valor de **e**, pero ninguna de ellas da una respuesta totalmente exacta, porque ***e*** es irracional y sus dígitos continúan para siempre sin repetirse.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2,00000
2	2,25000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827

El número de Euler

Hay muchas formas de calcular el valor de **e**, pero ninguna de ellas da una respuesta totalmente exacta, porque ***e*** es irracional y sus dígitos continúan para siempre sin repetirse.

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$\boldsymbol{x}$	$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$
-0,01	2,731999026
-0,001	2,719642219
-0,0001	2,718417779
0	
0,0001	2,718145927
0,001	2,716923932
0,01	2,704813829

1.

Función Logarítmica

Función Logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}^{+}$.

La función logarítmica con base a, denotada por :

$$\boldsymbol{f(x) = \log_a(x)}$$

en donde se cumple $a^{f(x)} = x$

Así $log_a(x)$ es el exponente al que se debe elevar la base a para resultar x

Función Logarítmica

Función de la forma:

$$f(x) = \log_a(x) \text{ con } x > 0,\ a \neq 1$$

$$\boldsymbol{a} \rightarrow Base$$
$$\boldsymbol{x} \rightarrow Argumento$$

Bases especiales

$$\boldsymbol{Base\ 10}\ (\log(\boldsymbol{x}))$$
$$\boldsymbol{Base\ e}\ \ (\ln(\boldsymbol{x}))$$

EJEMPLO

Escribir en forma exponencial:

a) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$

b) $\ln 7 \approx 1{,}945$

EJEMPLO

Escribir en forma logarítmica:

a) $10^{-3} = 0{,}001$

b) $e^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}3956$

ACTIVIDAD

Escribir en forma exponencial:

a) $\ln e = 1$

b) $\log \frac{1}{1000} = -3$

Escribir en forma logarítmica:

a) $5^3 = 125$

b) $e^{\ln(5)} = 5$

EJEMPLO

Evaluar la función en el valor indicado de x

a) $f(x) = 4 + log_{25}x \quad en \;\; x = 5$

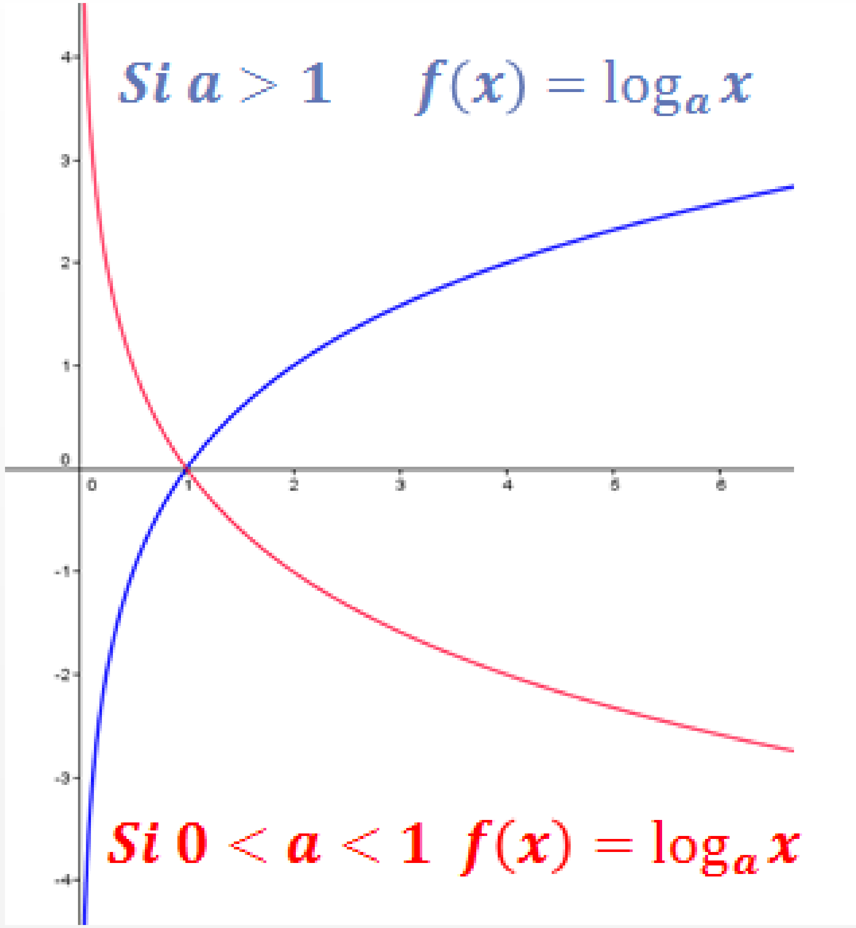
b) $f(x) = -\ln x \qquad\qquad en \;\; x = \frac{1}{2}$

ACTIVIDAD

Evaluar la función en el valor indicado de x

$$f(x) = 2log_8 x \qquad en \ \ x = 1$$

Gráfica Función Logarítmica



Dominio: $\mathbb{R}^+$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Intersección eje x: $(1,0)$

Intersección eje y: No tiene

Asíntota Vertical: $x = 0$

EJEMPLO

Para la función $f(x) = 1 - \ln(2x - 3)$ determine:

a) Dominio de $f(x)$
b) Recorrido de $f(x)$
c) Intersección eje x
d) Intersección eje y
e) Ecuación de asíntota vertical
f) Gráfico

EJEMPLO

Para la función $f(x) = 1 - \ln(2x - 3)$ determine:

a) Dominio de $f(x)$
b) Recorrido de $f(x)$

EJEMPLO

Para la función $f(x) = 1 - \ln(2x - 3)$ determine:

c) Intersección eje x
d) Intersección eje y

EJEMPLO

Para la función $f(x) = 1 - \ln(2x - 3)$ determine:

e) Ecuación de asíntota vertical
f) Gráfico

EJEMPLO

Gráfica

ACTIVIDAD

Para la función $f(x) = 5 - 3\ln\sqrt{2-x}$ determine:

a) Dominio de $f(x)$
b) Recorrido de $f(x)$
c) Intersección eje x
d) Intersección eje y
e) Ecuación de asíntota vertical
f) Gráfico

2.

Propiedades de los Logaritmos

CONTENIDO

Recordando las Propiedades de Logaritmos

- $\log_b(b) = 1$
- $\log_b(a \cdot c) = \log_b(a) + \log_b(c)$
- $\log_b(a^p) = p \cdot \log_b(a), \quad p \in \mathbb{R}$
- $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c)$
- $\log_b(b^p) = p$
- $b^{\log_b(c)} = c$
- $\log_b(x) = \log_b(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$,

  donde c es la nueva base

Observación

Aun cuando las propiedades de los Logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, **no hay una regla correspondiente para el logaritmo de una suma o diferencia**. Por ejemplo:

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

De hecho, se sabe que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. Del mismo modo, no simplificar incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo:

$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \neq 3\log_2 x$$

CONTENIDO

Derivada de la Función Logarítmica

$$f(x) = \log_a x$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

CONTENIDO

Derivada de la Función Logarítmica

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Si t $= \frac{h}{x}$, entonces $h = tx$ y Si $h \to 0$, entonces t $\to 0$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{t \to 0} \left[\log_a (1 + t)^{\frac{1}{tx}}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{t \to 0} \left[\log_a \left[(1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{x} \log_a (1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

Derivada de la Función Logarítmica

$$\frac{df}{dx} = \lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}\lim_{t \to 0}\left[\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}\left[\log_a \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}\left[\log_a e\right] \quad \text{o} \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}\left[\frac{ln(e)}{ln\,(a)}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{xln(a)}$$

Derivada de la Función Logarítmica

$$y = \log_a u$$

Con u dependiente de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \log_a(e) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \ln u$$

Con u dependiente de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

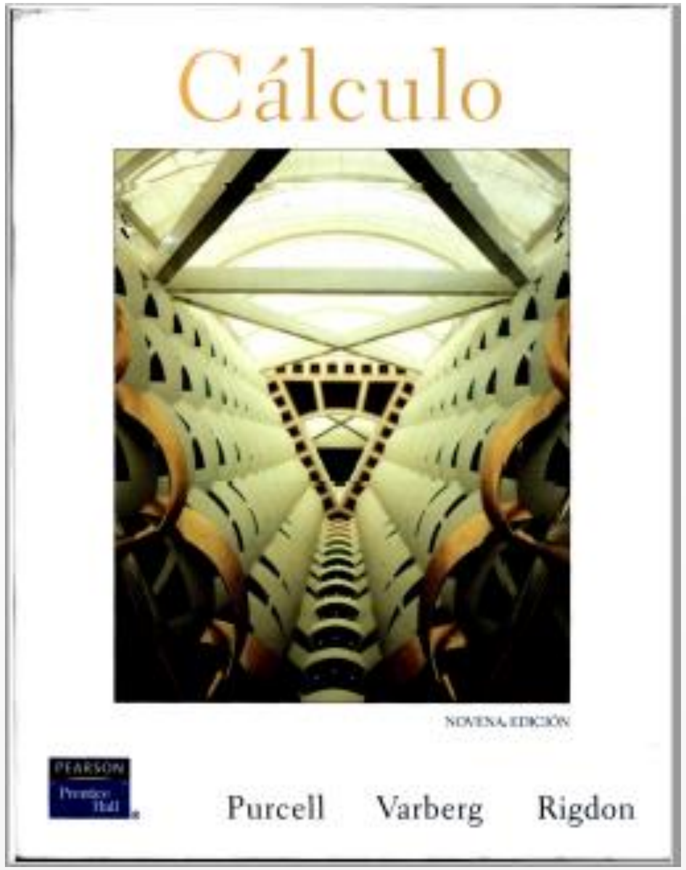
EJEMPLO

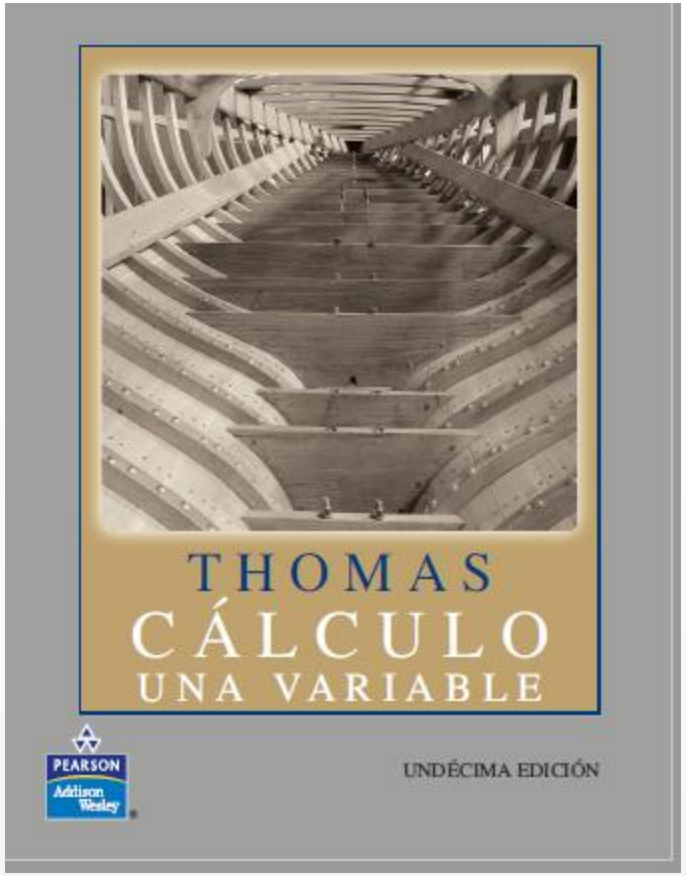
Dada la función $f(x) = \log_3(2x)$, calcule $f'(x)$

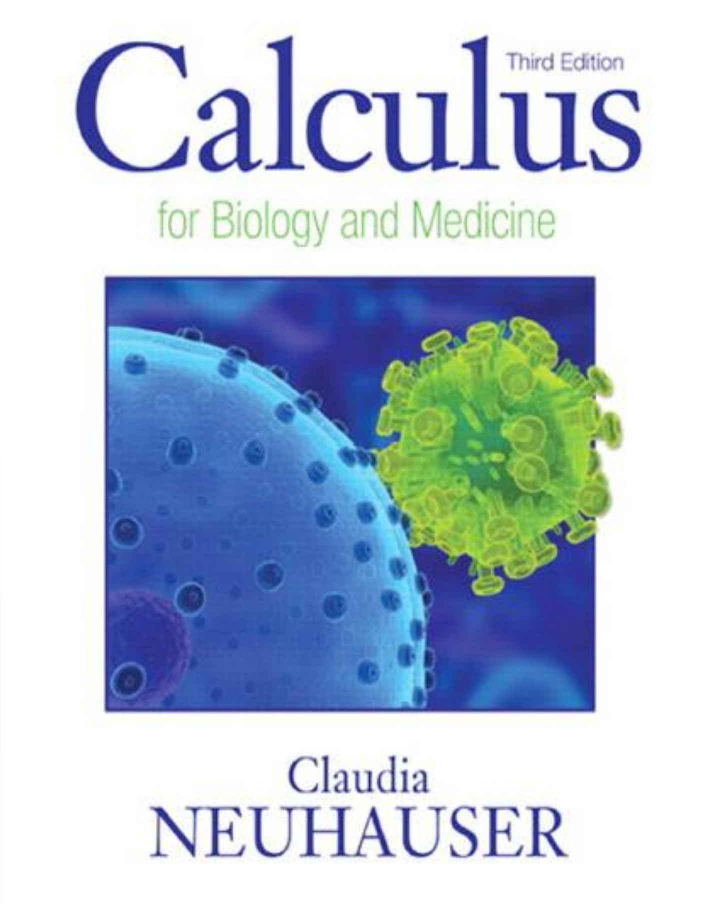
Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{2x}}{x-1}\right)$, calcule $f'(x)$

ACTIVIDAD

Derive la función $y = x \cdot \ln\sqrt{2 - x}$


Cálculo
NOVENA EDICIÓN
PEARSON
Prentice Hall
Purcell Varberg Rigdon


THOMAS
CÁLCULO
UNA VARIABLE
PEARSON
Addison Wesley
UNDÉCIMA EDICIÓN


Calculus
Third Edition
for Biology and Medicine
Claudia
NEUHAUSER

¿Preguntas?