Actividades Clase 07
Función Logaritmica

---

1. (Diapositiva 13) Escribir en forma exponencial: $\ln e = 1$

   La función $\ln x$ es la función inversa de la función exponencial e^x, por lo tanto, $\ln e$ es el número al que se le debe elevar e para obtener e, es decir, $\ln e = 1$. Por lo tanto, podemos escribirlo en forma exponencial como $e^1 = e$.

2. (Diapositiva 13) Escribir en forma exponencial: $\log \frac{1}{1000} = -3$

   Se tiene que en este caso, la base implícitamente es 10 al no estar enunciada. Por lo que, la forma exponencial sería: $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

3. (Diapositiva 13) Escribir en forma logarítmica: $5^3 = 125$

   En este caso, la base de nuestro logaritmo sería 5, el argumento corresponde al resultado de la potencia. Es decir sería de la forma: $\log_5 125 = 3$

4. (Diapositiva 13) Escribir en forma logarítmica: $e^{\ln 5} = 5$

   La función $\ln x$ es el logaritmo natural de x en base e, por lo tanto, $\ln 5$ es el exponente al que se debe elevar e para obtener 5. Entonces, podemos escribir $\ln 5$ en forma logarítmica como $\log_e 5$. Por lo tanto, $e^{\ln 5} = e^{\log_e 5} = 5$, ya que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica.

5. (Diapositiva 15) Evaluar la función $f(x) = 2\log_8 x$ en $x = 1$.

   Para evaluar la función $f(x) = 2\log_8 x$ en $x = 1$, sustituimos x por 1 en la expresión de la función:

   $$f(1) = 2\log_8 1$$

   El logaritmo de 1 en cualquier base es siempre 0, por lo que podemos simplificar la expresión:

   $$f(1) = 2 \cdot 0 = 0$$

   Por lo tanto, $f(1) = 0$.

6. (Diapositiva 22) Dada la función $f(x) = 5 - 3\ln\sqrt{2-x}$, determinar:

   a) El dominio de $f(x)$.
   b) El recorrido de $f(x)$.
   c) Las intersecciones con el eje x.
   d) La intersección con el eje y.
   e) La ecuación de la asíntota vertical.
   f) Graficar la función.

   a) Dominio de $f(x)$
   La función $f(x)$ está definida en el conjunto de los números reales tales que $2 - x > 0$, ya que si $2 - x \leq 0$, el argumento del logaritmo sería no positivo y por lo tanto la función no estaría definida. Por lo tanto, el dominio de $f(x)$ es el intervalo $(-\infty, 2[$.

   b) Recorrido de $f(x)$
   La función $f(x)$ es de la forma $f(x) = 5 - 3\ln\sqrt{2-x}$. El logaritmo natural tiene como rango todo el conjunto de los números reales, por lo tanto, el rango de la función $f(x)$ está dado por $\mathbb{R}$.

   c) Intersecciones con el eje x
   Para encontrar las intersecciones de $f(x)$ con el eje x, igualamos la función a cero y resolvemos para x:

$$\begin{aligned} 5 - 3\ln\sqrt{2-x} &= 0 \\ \ln\sqrt{2-x} &= \frac{5}{3} \\ \sqrt{2-x} &= e^{\frac{5}{3}} \\ 2 - x &= e^{\frac{10}{3}} \\ x &= 2 - e^{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la única intersección con el eje x es $(2 - e^{\frac{10}{3}}, 0)$.

   d) Intersección con el eje y
   Para encontrar la intersección de $f(x)$ con el eje y, evaluamos la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 - 3\ln\sqrt{2-0} \\ &= 5 - 3\ln\sqrt{2} \\ &= 5 - 3\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 5 - 3\cdot\frac{1}{2}\ln 2 \\ &= 5 - \frac{3}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la intersección con el eje y es $(0, 5 - \frac{3}{2}\ln 2)$.

e) Ecuación de la asíntota vertical
Una función tiene una asíntota vertical en $x = a$ si $f(x)$ tiende a $\pm\infty$ cuando x se acerca a a por la izquierda o por la derecha. En este caso, la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$, ya que el logaritmo natural tiende a infinito cuando su argumento se acerca a cero por la derecha. Por lo tanto, la ecuación de la asíntota vertical es $x = 2$.

f) Gráfico
Observamos que la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y que su gráfica comienza en $(2 - e^{\frac{10}{3}}, 0)$ y se acerca asintóticamente a la asíntota vertical. También podemos notar que la función alcanza su valor máximo de 5 en $x = 2$, y su valor mínimo en $(0, 5 - \frac{3}{2}\ln 2)$.

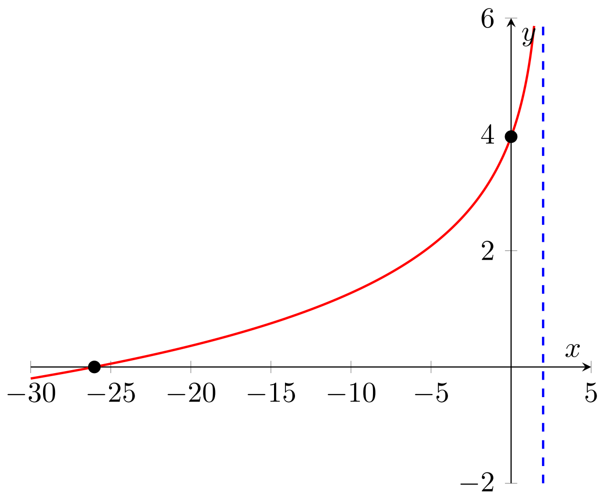

Figura 1: Gráfica de la función: $f(x) = 5 - 3\ln\sqrt{2-x}$

7. (Diapositiva 31) Derive la función $y = x \cdot \ln\sqrt{(2-x)}$
Aplicando la regla del producto obtenemos:

$$\begin{aligned} y' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 1 \cdot \ln\sqrt{(2-x)} + x \cdot \left(-\frac{1}{2(2-x)}\right) \\ &= \ln\sqrt{(2-x)} - \frac{x}{2(2-x)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la función es $y' = \ln\sqrt{(2-x)} - \frac{x}{2(2-x)}$.
Una forma equivalente sería reescribir la función original:

$$y = x \cdot \ln\sqrt{(2-x)} = \frac{1}{2}x \cdot \ln(2-x)$$

Y su derivada estaría dada por:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}\right)$$