Ejercicios Seminario función Exponencial

1. En un estudio de ayuno, el peso de un voluntario bajó de 90 kg a 80 kg en 60 días. Si el peso se elimina de forma exponencial.
   a) Grafique la función. (indique ejes, unidad de medida y titulo)
   b) ¿Por cuánto tiempo es conveniente realizar el estudio de ayuno, sin perjudicar la salud del voluntario, si lo mínimo que puede llegar a pesar es 50 kg?
   c) En que instante, la rapidez con la que cambia el peso del voluntario es –0,17 kg/día

a) Determinamos la función

$P(t) = P_0 \cdot e^{-kt}$, se tiene que:

$P_0 = 90$, considerando t en días, se sabe que en $t=60$, $P(60)=80$.

$$80 = 90 \cdot e^{-60k}$$

$$\frac{8}{9} = e^{-60k} \qquad / \ln$$

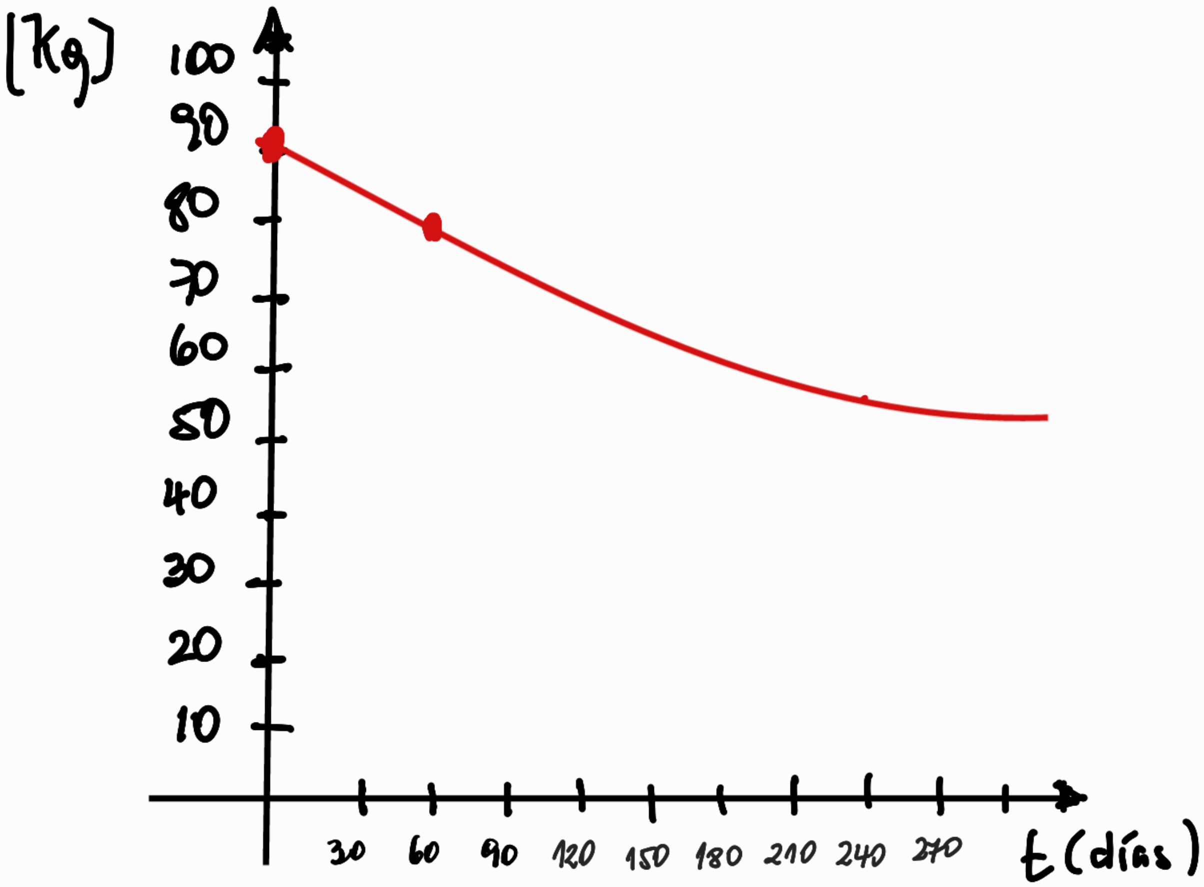
$$\ln\left(\frac{8}{9}\right) = -60k \qquad / : -60$$

$$k = \ln\left(\frac{9}{8}\right) \cdot \frac{1}{60} \approx \underbrace{0{,}001963}$$

énfasis en usar al menos 6 decimales

Entonces: $P(t) = 90 \cdot e^{-0.001963 \cdot t}$

Graficando:



b) Se pide t, tal que $P(t) \geq 50$ kg, entonces:

$$50 = 90 \cdot e^{-K \cdot t}$$

$$\frac{5}{9} = e^{-Kt} \qquad / \ln$$

$$\ln\left(\frac{5}{9}\right) = -Kt$$

$$\frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{K} = t$$

$$t \approx 299 \text{ días}$$

R: Se recomienda que el tratamiento no dure más de 299 días (10 meses aprox)

c) Se pide t, tal que $P'(t) = -0{,}17$ kg/día, por lo que:

$$P'(t) = P_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot -k$$

$$\frac{0{,}17}{P_0 \cdot K} = e^{-Kt} \quad / \ln$$

$$\ln\left(\frac{0{,}17}{90 \cdot K}\right) = -Kt$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{90 \cdot K}{0{,}17}\right)}{K} \approx 19{,}61 \text{ días}$$

Arreglar

Se cambió $f(t)$

2. El desarrollo de epidemia de peste negra en una pequeña aldea se caracteriza por tener un comportamiento modelado por la función: $f(t) = \frac{250}{5+15\,e^{-2t}}$, que representa la cantidad de personas, medida en cientos de personas que adquieren la peste en un tiempo de t semanas.

a) ¿Cuál es la cantidad inicial de contagiados de la aldea?

b) ¿Cuál es la cantidad de habitantes totales de la aldea? ¿Cómo podríamos determinarlos?

c) ¿Después de cuantos días se esperaría tener 4000 contagiados?

d) ¿En qué instante se produce cambio de concavidad en el crecimiento de número de contagiados?

e) Determine $\frac{df}{dt}$ e interprete su significado en el contexto del problema

a) Se pide $f(t)$ cuando $t=0$, entonces:

$$f(0) = \frac{250}{5+15\,e^{-2\cdot 0}}$$

$$= \frac{250}{20} = 12{,}5$$

R// Inicialmente habrían 1250 hab. contagiados

b) Existen 2 opciones, primero usando el modelo:

$$M(t) = \frac{M_0}{1 + C e^{-kt}}, \quad \text{con } M_0 : \text{Población total}$$

En nuestro caso:

$$f(t) = \frac{250}{5(1+3\cdot e^{-2t})} = \frac{50}{1+3e^{-2t}}$$

Es decir, la población total es de 5000 habitantes.

opción 2: Usando Límites $(t \to \infty)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{250}{5+15\cdot e^{-2t}} = \frac{250}{5} = 50$$

obteniendo de igual manera los 5.000 habitantes

c) Se pide determinar t, tal que $f(t) = 40$, entonces:

$$40 = \frac{250}{5+15\cdot e^{-2t}}$$

$$4\cancel{0} = \frac{5\cancel{0}}{1+3\cdot e^{-2t}}$$

$$4 + 12\cdot e^{-2t} = 5$$

$$12\cdot e^{-2t} = 1$$

$$e^{-2t} = \frac{1}{12} \quad / \ln$$

$$-2t = \ln\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$t = \frac{\ln(12)}{2} \approx 1{,}24$$

R// Aproximadamente al comienzo del día 9 $(7 \cdot 1{,}24)$

d) Se pide encontrar el punto de inflexión. Recordar (o dan como tip) que en $y = \frac{M}{2}$ ocurre esto que corresponde a $x = \frac{\ln(c)}{K}$

En nuestro ejemplo: $\left(\frac{\ln(3)}{2}, 25 \right) \approx (0.55, 25)$ es el punto de inflexión.

f) $$\frac{df}{dt} = \left[\frac{50}{1+3e^{-2t}} \right]' = \left[50 \cdot (1+3e^{-2t})^{-1} \right]'$$

obs: esta derivada no es trivial

$$= 50 \cdot -1 \cdot (1+3 \cdot e^{-2t})^{-2} \cdot \underbrace{3 \cdot e^{-2t} \cdot -2}$$

Es la derivada de $(1+3e^{-2t})$

$$= \frac{300 \cdot e^{-2t}}{(1+3 \cdot e^{-2t})^2}$$

Corresponde a como cambia la cantidad de contagiados con respecto al tiempo, en una semana determinada.