Actividades Clase 09
Modelo Sinusoidal

---

1. (Ejemplo Diapositiva 11) Para las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, calcular:

   a) $2f(\pi/3) + 3g(\pi/4)$
   Se tiene que para f y g:

$$\begin{aligned} 2f(\pi/3) + 3g(\pi/4) &= 2\sin(\pi/3) + 3\cos(\pi/4) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

   b) x si $f(x) = 0.5$
   Igualamos $\sin(x)$ a 0.5 y buscamos los valores de x que satisfacen esta ecuación. Usamos la función inversa del seno, $\sin^{-1}$ o arcsen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5 \\ \sin(x) &= 0.5 \\ x &= \sin^{-1}(0.5) \end{aligned}$$

   Los valores de x que satisfacen esta ecuación son $x = \pi/6 + 2\pi k$ y $x = 5\pi/6 + 2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

2. (Actividad Diapositiva 12) Para las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, calcular:

   a) $f(-2)g(1)$
   Se tiene que para f y g:

$$\begin{aligned} f(-2)g(1) &= \sin(-2)\cos(1) \\ &= -\sin(2)\cos(1) \end{aligned}$$

   Dado que no tenemos las relaciones trigonométricas exactas para estos valores, la respuesta se puede obtener una aproximación decimal utilizando una calculadora.

$$f(-2)g(1) \approx -0.49$$

   b) Valor de x si $g(x) = 0.8$ en el intervalo $[0, 2\pi]$
   Igualamos $\cos(x)$ a 0.8 y buscamos los valores de x que satisfacen esta ecuación. Usamos la función inversa del coseno, $\cos^{-1}$ o arccos:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.8 \\ \cos(x) &= 0.8 \\ x &= \cos^{-1}(0.8) \end{aligned}$$

   Los valores de x que satisfacen esta ecuación son $x = \cos^{-1}(0.8)$ y $x = 2\pi - \cos^{-1}(0.8)$, ambos en el intervalo $[0, 2\pi]$. Aproximando el arco coseno de 0.8, que es $\arccos(0.8) \approx 0.64$ radianes, o alrededor de 36.87 grados.

   Pero como la función coseno tiene una periodicidad de 2π, la otra solución en el intervalo $[0, 2\pi]$ será $2\pi - \arccos(0.8)$, lo cual es aproximadamente 5.64 radianes, o alrededor de 323.13 grados.

3. (Ejemplo Diapositiva 18) Graficar $f(x) = 2\sin(2x - \pi) + 3$

   Los valores de los coeficientes de la función son:

   - $A = 2$
   - $B = 2$
   - $C = \pi$
   - $D = 3$

   Por ende, se tiene que:

   - Ampitud: 2
   - Eje de Desarrollo: $y = 3$
   - Período: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$
   - Desfase: $\frac{\pi}{2}$
   - Recorrido: $[1, 5]$

   Y por lo tanto, la gráfica sería:

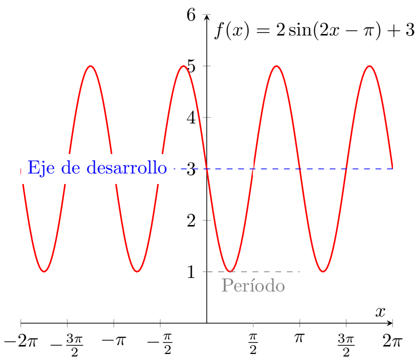

Figura 1: Gráfica de la función: $f(x) = 2\sin(2x - \pi) + 3$

4. (Ejemplo Diapositiva 19) Graficar $f(x) = 2\cos(2x - \pi) + 3$

   Como comparten los mismos valores para A, B, C y D. Por lo que la gráfica sería:

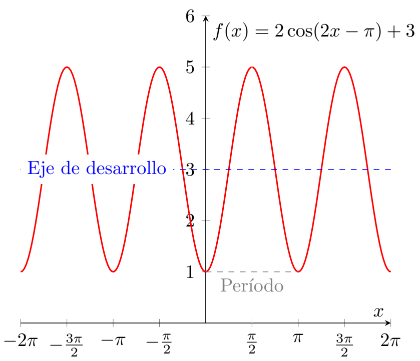

Figura 2: Gráfica de la función: $f(x) = 2\cos(2x - \pi) + 3$

5. (Actividad Diapositiva 20) Graficar

a) $f(x) = 1.5\cos(\frac{\pi}{2} - x) + 4.5$
Notamos que por la paridad de la función cos la función es equivalente a

$$f(x) = -1.5\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 4.5$$

- $A = -1.5$
- $B = 1$
- $C = \frac{\pi}{2}$
- $D = 4.5$

Por ende, se tiene que:

- Ampitud: 1.5
- Eje de Desarrollo: $y = 4.5$
- Período: $P = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$
- Desfase: $\frac{\pi}{2}$
- Recorrido: $[3, 6]$

Y su gráfica sería:

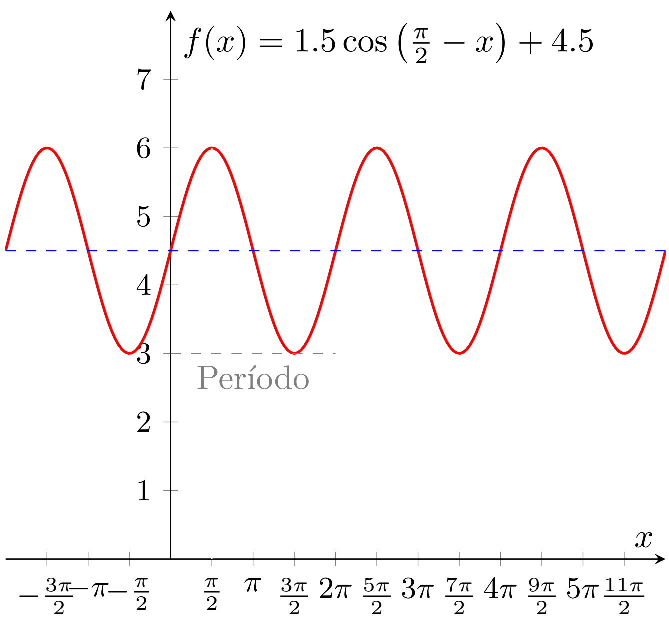

Figura 3: Gráfica de la función: $f(x) = 1.5\cos(\frac{\pi}{2} - x) + 4.5$

Como observación extra, esta función también equivale a

$$f(x) = 1.5\sin(x) + 4.5$$

b) $f(x) = 2 - \sin\left(\frac{x}{3} - 2\pi\right)$
Notamos que por el período de la función sin la función es equivalente a

$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

- $A = -1$
- $B = 1\frac{1}{3}$
- $C = 0$
- $D = 2$

Por ende, se tiene que:

- Ampitud: 1
- Eje de Desarrollo: $y = 2$
- Período: $P = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$
- Desfase: 0
- Recorrido: $[1, 3]$

Y su gráfica sería:

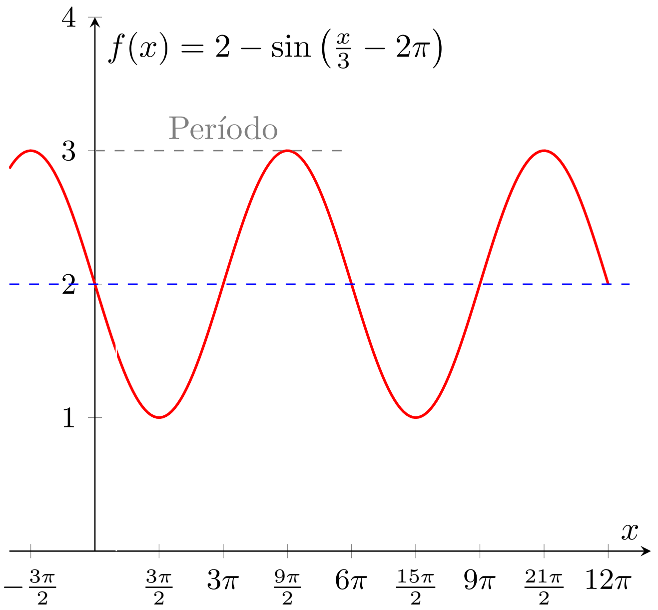

Figura 4: Gráfica de la función: $f(x) = 2 - \sin(\frac{x}{3} - 2\pi)$

6. (Ejemplo Diapositiva 23) Determinar la derivada de:

   a) $y = x\sin(x)$
   Utilizando la regla del producto $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x) + x\cos(x)$$

   b) $y = 5\cos(\sqrt{x})$
   Aplicamos la regla de la cadena para derivar $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5(-\sin(\sqrt{x}))\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= -\frac{5}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})\end{aligned}$$

   c) $y = \tan(2x)$
   La derivada de $\tan(x)$ es $\sec^2(x)$, y aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sec^2(2x)\cdot 2\\ &= 2\sec^2(2x)\end{aligned}$$

7. (Actividad Diapositiva 23) Determinar la derivada de:

   a) $f(x) = 3\cos^2(2x-1)$
   Utilizando la regla de la cadena y la derivada de $\cos(x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3\cdot 2\cos(2x-1)(-\sin(2x-1))\cdot 2\\ &= -12\cos(2x-1)\sin(2x-1)\end{aligned}$$

   b) $f(x) = \sin(\ln(x))$
   Aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x}\cos(\ln(x))\end{aligned}$$

   c) $f(x) = \sqrt{\sin(2x-\pi)}$
   Usando la regla de la cadena y la derivada de $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x-\pi)}}\cdot\cos(2x-\pi)\cdot 2\\ &= \frac{\cos(2x-\pi)}{2\sqrt{\sin(2x-\pi)}}\end{aligned}$$

8. (Ejemplo Diapositiva 27) Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$
   Multiplicamos y dividimos por $1+\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{\sin(x)(1+\cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \\ &= 0\end{aligned}$$

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
   Usamos la propiedad del límite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{\frac{1}{6x}}{\frac{1}{6x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{1}{3x}}{\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{2x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$