FACULTAD DE MEDICINA
UNIVERSIDAD DE CHILE

La Derivada como Razón de Cambio

Unidad de Biomatemáticas
Matemáticas I – Primer Semestre

Logros de Aprendizaje

1. Diferenciar razones de cambio promedio e instantáneas.

2. Reconocer la derivada como razones de cambio en diferentes contextos.

3. Conocer las razones de cambio relacionadas.

4. Resolver problemas de razones de cambios y ritmos relacionadas.

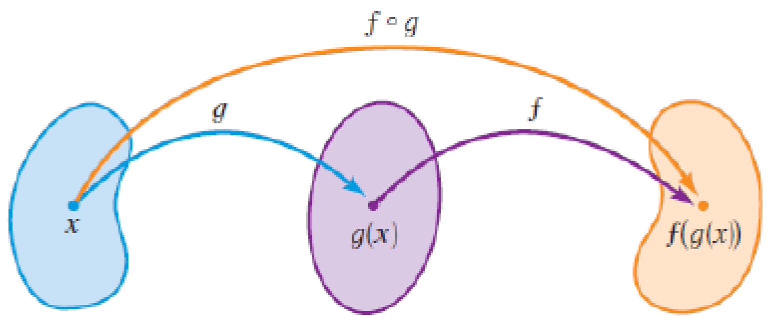
Contenidos

1. Interpretación geométrica de la Derivada
2. Interpretación física de la Derivada
3. Razones de cambio promedio, instantánea y relacionadas.

Regla de la Cadena

Regla que permite derivar una función compuesta:

$$fog(x) = f\big(g(x)\big)$$



$$\frac{d}{dx}(f\ o\ g) = f'(g)\cdot g' \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

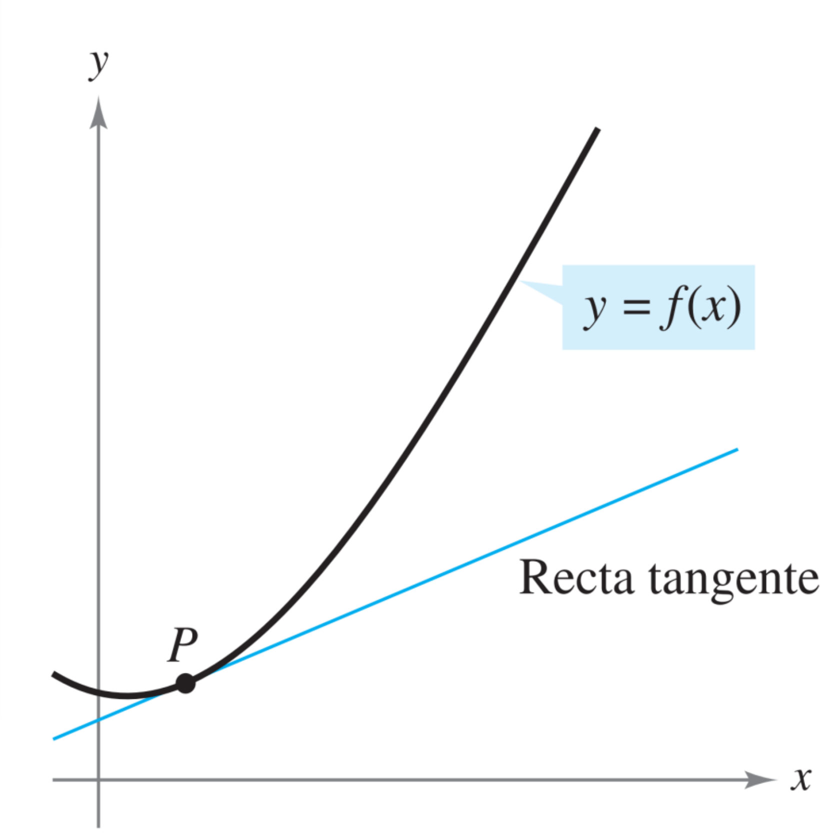
EJEMPLO

Determine la derivada de la función $f(x) = 3x \cdot (5x+2)^{10}$

EJEMPLO

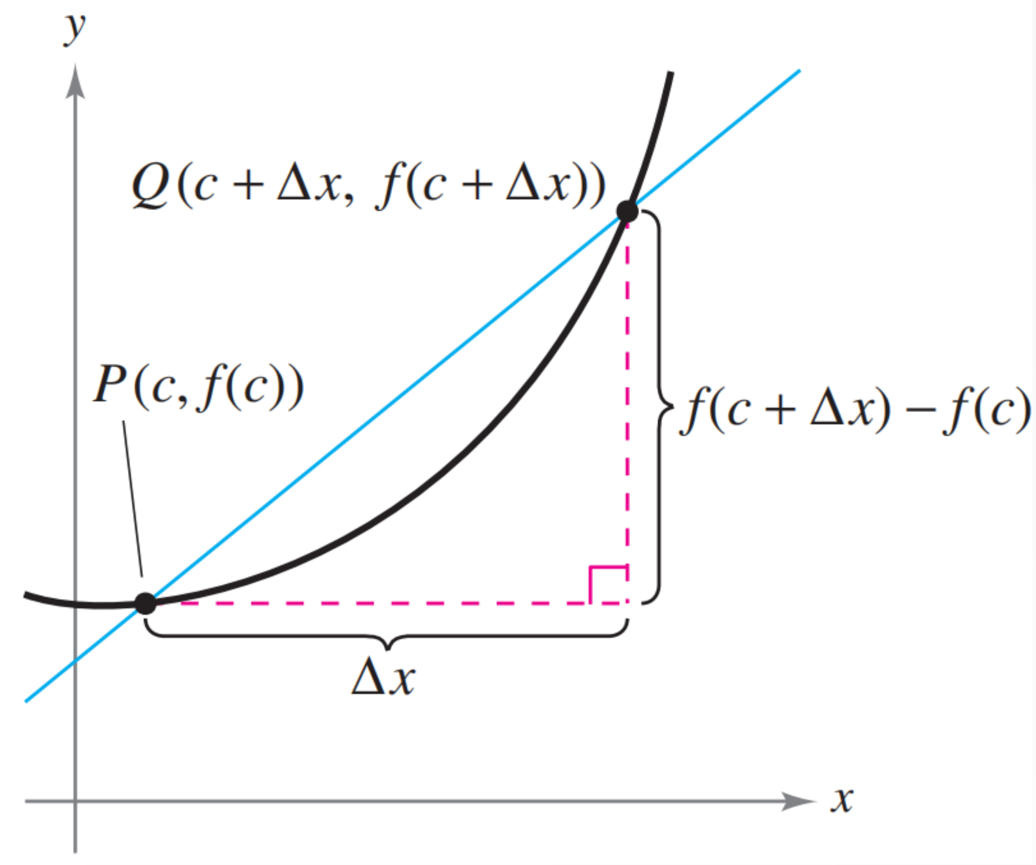
Determine la derivada de la función $f(x) = \sqrt{6x^3 + 4x}$

El Problema de la Recta Tangente



En el problema de la recta tangente, se tiene una función f y un punto P de su gráfica y se trata de encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto P, como se muestra en la figura.

INTRODUCCIÓN



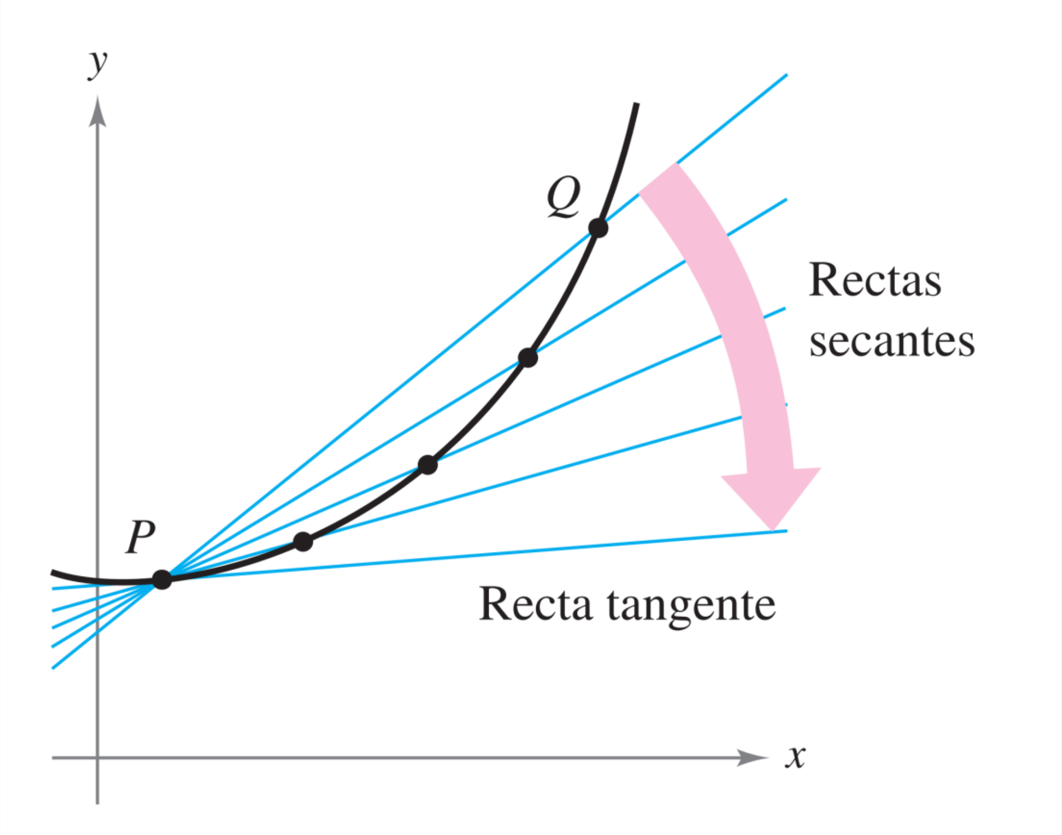
Si $P(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $Q\big(c+\Delta x, f(c+\Delta x)\big)$ un punto de la gráfica, entonces podemos calcular la pendiente de esta **recta secante** como:

$$m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

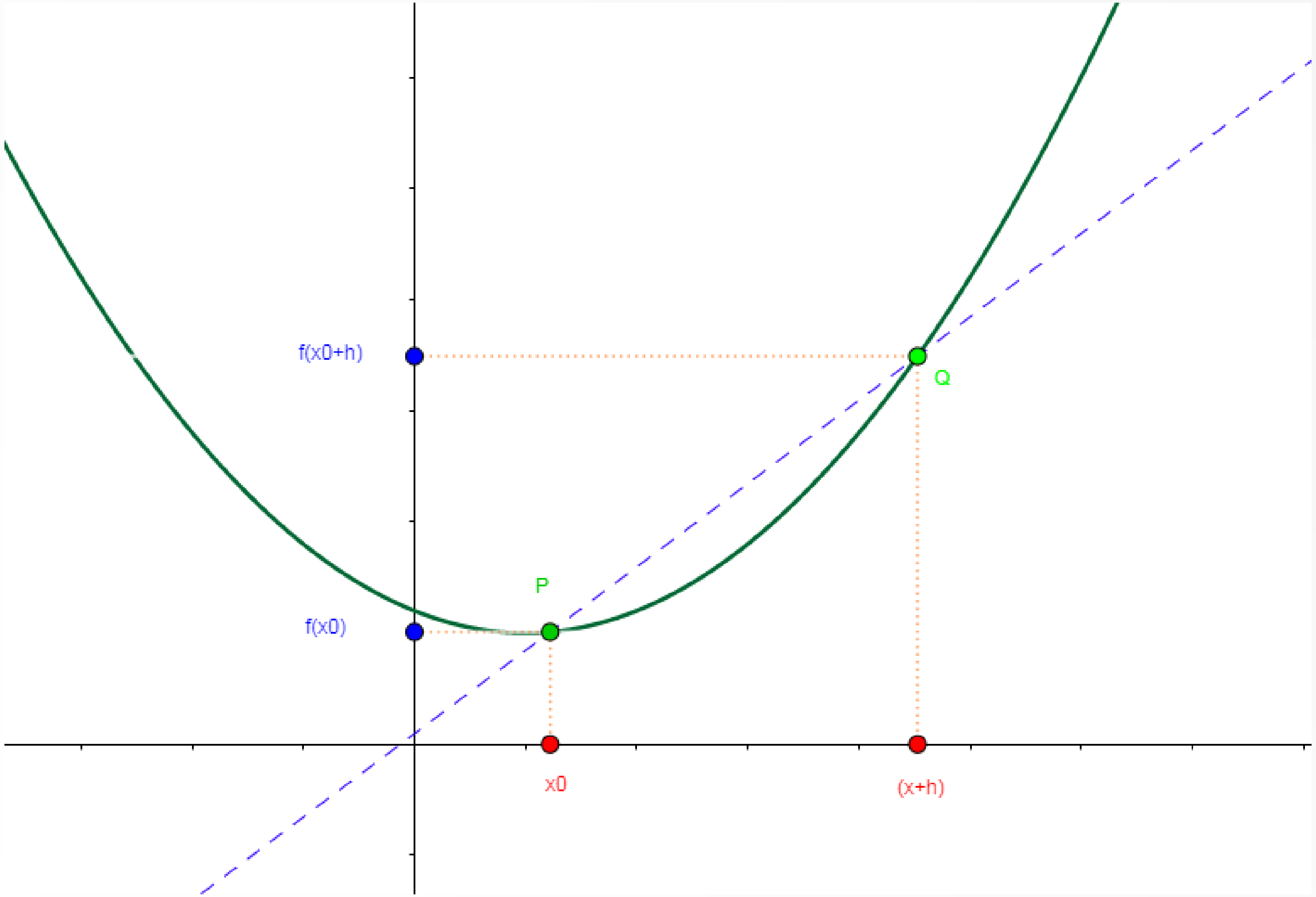
INTRODUCCIÓN

A medida que el punto Q se aproxima al punto P, la pendiente de la recta secante se aproxima a la de la recta tangente, como se muestra en la figura.

Cuando existe tal "***posición límite***", se dice que la pendiente de la recta tangente es el ***límite*** de la pendiente de la recta secante



INTRODUCCIÓN



1.

Interpretación Geométrica de la Derivada

Pendiente de la Recta Tangente

La derivada de $f(x)$ es la función que permite calcular la pendiente de la recta tangente en cualquier punto $x = x_0$

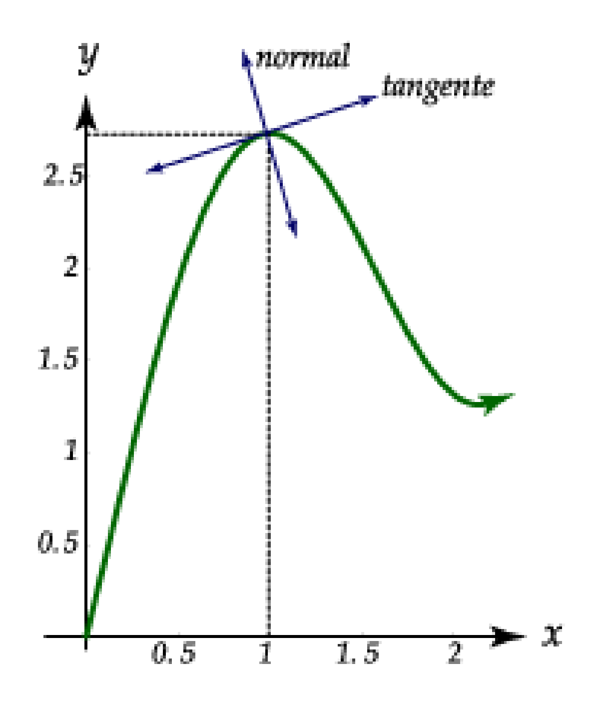
La derivada de $f(x)$ evaluada en $x = x_0$, es la pendiente de la recta tangente en $x = x_0$

Por lo que la ecuación de la recta quedaría:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$$

Recta Normal a una Curva

La recta normal a una gráfica en un punto dado, es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto:



$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto (2, 3)

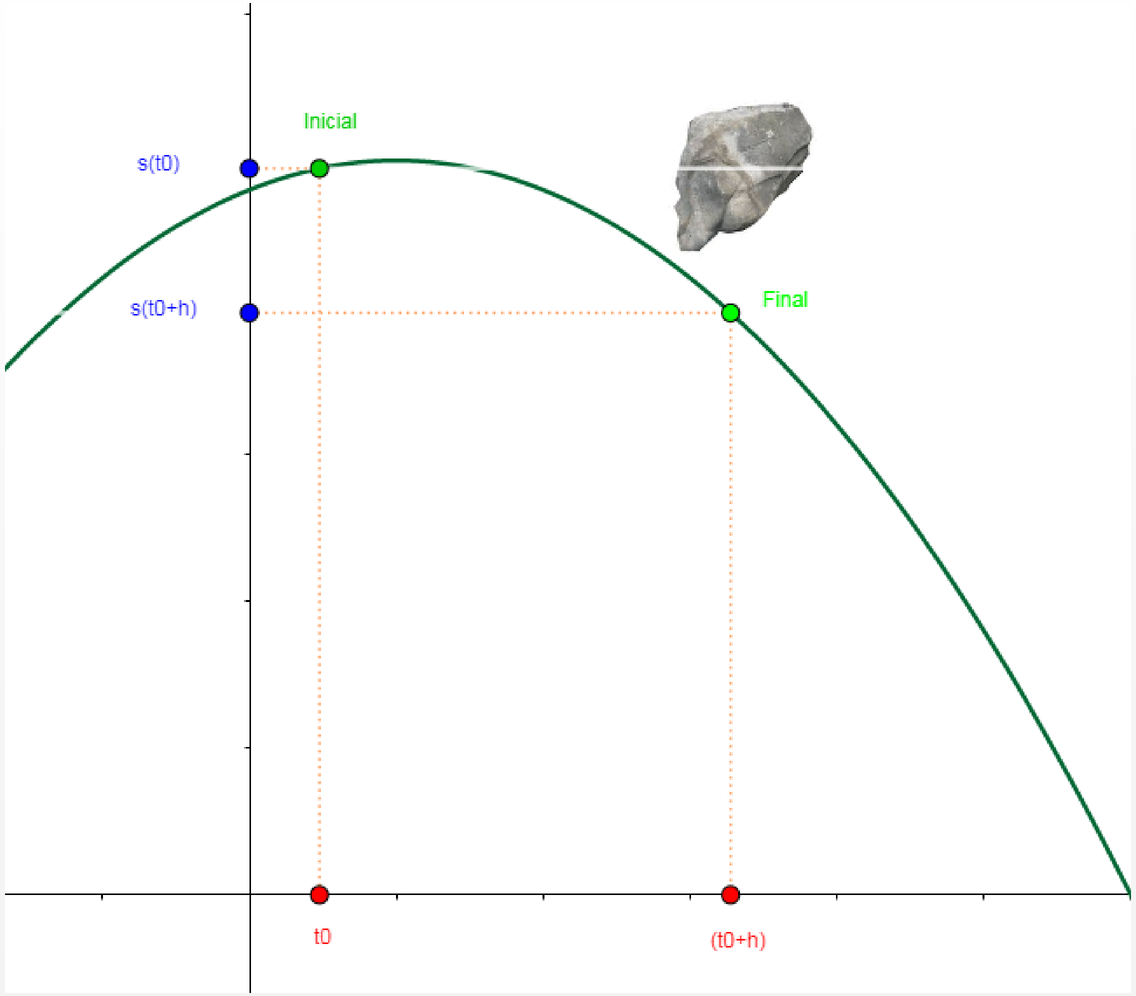
ACTIVIDAD

Obtenga la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4 - x}$ en el punto $(-5,3)$.

2.

Cambio de Velocidades

Interpretación Física de la Derivada



Link

EJEMPLO

En el instante $t = 0$, un saltador se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina. La posición del saltador viene dada por:

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

Si el tiempo t está en segundos, entonces:

A) ¿Cuál es su velocidad en el instante $t = 1{,}5$ segundos?
B) ¿Cuál es su aceleración en el instante $t = 1{,}5$ segundos?

EJEMPLO

ACTIVIDAD

La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo está dada por la función $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$, con s en metros y t en segundos.

Determine:

a) Velocidad al inicio del movimiento.

b) Posición y velocidad de la partícula cuando $a(t) = 0$

3.

Razón de Cambio Instantánea

CONTENIDO

De la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea.

Razón de cambio promedio

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Razón de cambio instantánea

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

EJEMPLO

Es habitual que los recién nacidos pierdan masa durante unos pocos días, posteriormente aumentan de masa. Un modelo para la masa media de los recién nacidos durante las dos primeras semanas de vida, es:

$$P(t) = 0.015t^2 - 0.18t + 3.1$$

Con $P(t)$ en kilogramos y t en días.

A) ¿Con qué rapidez cambia la masa de los recién nacidos entre el día 2 y 5?
B) ¿Con qué rapidez cambia la masa de los recién nacidos al cumplir una semana de vida?

EJEMPLO

Razón de cambio relacionadas

Si una variable $\boldsymbol{y}$ depende del tiempo, entonces su derivada $\frac{dy}{dt}$ se denomina razón de cambio con respecto al tiempo , o sólo razón de cambio.

Si tenemos $y(x(t))$. Podemos conocer $y(x)$ y no conocer $x(t)$ pero si sabemos algo sobre $\frac{dx}{dt}$, entonces podemos determinar $\frac{dy}{dt}$, por que $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dt}$ son razones de cambio relacionadas.

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

EJEMPLO

Se suelta un pequeño globo en un punto a 15m alejado de un observador , quien se encuentra a nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a una velocidad de 8 m/s, ¿Qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a 50m de altura?

ACTIVIDAD

Un cubo de hielo de $10\ cm^3$ de volumen, comienza a derretirse a razón de $6\ [cm^3/s]$, ¿Cuál es la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante?