Actividades Clase 04
Límites y Derivadas

---

1. (Diapositiva 20) Calculamos el límite de:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Como este límite tiene la forma $\frac{0}{0}$ tenemos que usar la técnica de racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1) \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. (Diapositiva 28) ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \sqrt{x-1}$?

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)-1} - \sqrt{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1} + x - 2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}
$$

3. (Diapositiva 30) ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$?

   La derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ se puede calcular utilizando la regla de la derivada de potencia, donde se transforma la raíz en un exponente $f(x) = x^{1/2}$

   Luego:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} x^{1/2-1} \\
&= \frac{1}{2} x^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2x^{1/2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. (Diapositiva 41) ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \frac{5}{(2-x)^3}$?

   La derivada de $f(x) = \frac{5}{(2-x)^3}$ se puede encontrar utilizando la regla de la multiplicación de derivadas y la regla de la cadena:

   Reescribimos

   $$f(x) = 5(2-x)^{-3}$$

   Y luego se tiene que:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot \left[(2-x)^{-3}\right]' \\ &= 5 \cdot (-3)(2-x)^{-4} \cdot (2-x)' \\ &= 5 \cdot (-3)(2-x)^{-4} \cdot (-1) \\ &= \frac{15}{(2-x)^4} \end{aligned}$$

5. (Diapositiva 42) ¿Cuál es la derivada de $f(x) = 3x(2-x)^{10}$?

   La derivada de $f(x) = 3x(2-x)^{10}$ se puede encontrar utilizando la regla de la multiplicación de derivadas y la regla de la cadena:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= (3x)' \cdot (2-x)^{10} + 3x \cdot \left[(2-x)^{10}\right]' \\ &= 3(2-x)^{10} + 3x \cdot 10(2-x)^9 \cdot (2-x)' \\ &= 3(2-x)^{10} + 30x(2-x)^9 \cdot (-1) \\ &= 3(2-x)^{10} - 30x(2-x)^9 \end{aligned}$$

   En la segunda línea se aplicó la regla de la multiplicación de derivadas, y en la tercera línea se utilizó la regla de la cadena para encontrar la derivada de $(2-x)^{10}$.