Soluciones Actividad Autónoma 11
INTEGRAL INDEFINIDA

1. Sensibilidad al cambio.

   a) El error estimado por diferenciales es $dV = 2.88\pi \cong 9{,}048\ cm^3$

   b) El error estimado por diferenciales es $dg = 0.96\pi \cong 3{,}016\ cm^2$

   c) Los cambios relativos estarán dados por:

$$\frac{dV}{V} \cdot 100 = \frac{3dr}{r} \cdot 100 = 1\%$$
$$\frac{dS}{S} = \frac{2dr}{r} \cdot 100 \approx 0.66\%$$

2. Los errores de aproximación son, para $f(x) = x^3 - x, x_o = 1, dx = 0{,}1$

$$\Delta f = dx(3x_0^2 - 1 + 3x_0 dx + dx^2) = 0.231$$
$$df = dx(3x_0^2 - 1) = 0.2$$
$$|\Delta f - df| = |dx(3x_0 dx + dx^2)| = 0.31$$

Y para $f(x) = x^2 + 2x, x_o = 1, dx = 0{,}1$

$$\Delta f = dx(2x_0 + 2 + dx) = 0.41$$
$$df = dx(2x_0 + 2) = 0.4$$
$$|\Delta f - df| = |dx^2| = 0.01$$

3. Sea $S(t)$ la superficie de la una herida, medida en cm^2, y t medido en días. Tenemos $S'(t) = -3(t+2)^{-2}$ y $S(1) = 2$. Nos preguntan por $S(4)$. Note que

$$S(t) = 3(t+2)^{-1} + C$$

Usando que $S(1) = 2$, obtenemos $S(t) = 3(t+2)^{-1} + 1$. De esta forma la superficie de la herida el viernes es de $\frac{3}{2}\ cm^2$.

4. Las derivadas son:

   a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$

   c) $\frac{dy}{dx} = -\sin(x^2)2x$

5. Las respectivas funciones son:

   a) $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2$

   b) $f(x) = -12\ln|x| + x^3 - 2x^2 - 10x + 13$

   c) $f(x) = 4\cos(x) + 2$

   d) $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{13}{2}$

6. Si r crece un 10%, entonces se tiene que: $dV = 0{,}4kr^4$, $\Delta V = 0{,}4641kr^4$

7. Basta integrar y usar el hecho que $f(3) = 7$. En efecto, tenemos que $f'(x) = 4x - 5$. Luego:

$$f(x) = \int (4x - 5)\, dx = 2x^2 - 5x + C$$

   Por otro lado $f(3) = 3 + C \Rightarrow C = 4$. Por lo tanto $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$.

8. Tenemos que $y'' = 6x - 8$

$$y' = \int (6x - 8)dx = 3x^2 - 8x + C_1$$

   A partir del enunciado se tiene $C_1 = 9$

$$y = \int (3x^2 - 8x + 9)dx = x^3 - 4x^2 + 9x + C_2$$

   A partir del enunciado se tiene $C_2 = -6$

$$y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$$

9. Análogo a lo realizado en el ejercicio anterior. Si llamamos a $E(t)$ al porcentaje que representa la eficiencia de un trabador en el instante t, tenemos que $E'(t) = 35 - 8t$ y $E(3) = 81$. Luego,

$$E(t) = \int (35 - 8t)\, dt = -4t^2 + 35t + C$$

Usando que $E(3) = 81$ obtenemos que $E(t) = -4t^2 + 35t + 12$.

Al trabajar 8 horas la eficiencia es del 36%.

10. Sea $V(t)$ el volumen, medido en μcm^3, de la célula vegetal; donde la variable t está medida en días. Nos preguntan por $V(8)$, sabiendo que $V'(t) = (12 - t)^2 = (t - 12)^2$ y $V(3) = 3$. Luego,

$$V(t) = \int (t - 12)^2\, dt = \frac{(t - 12)^3}{3} + C$$

Usando que $V(3) = 3$, obtenemos $V(t) = \frac{(t-12)^3}{3} + 246$. Por lo tanto $V(8) = \frac{-64}{3} + 246\ \mu cm^3$.

11. Dada la ecuación $\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$ se tiene que:

a) Tenemos que $\frac{dx}{x(N-x)} = kdt$. Integrando (fracciones parciales, en el lado izquierdo) obtenemos:

$$\frac{1}{N}\ln(x) - \frac{1}{N}\ln(N - x) = kt + c$$

Con c constante de integración, Lo cual es equivalente a $\ln\left(\frac{x}{N-x}\right) = cNkt$. Así,

$$\frac{x}{N - x} = e^c e^{Nkt}$$

Reescribiendo $e^c = C\ y$ despejando x obtenemos $x(t) = \frac{NCe^{Nkt}}{1+Ce^{Nkt}}$.

Como $x(0) = 2, N = 1000, k = \frac{1}{250}$ tenemos $2 = \frac{1000C}{1+C}$ por lo que $C = \frac{1}{499}$

$$x(t) = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$$

b) Nos preguntan por t tal que $x(t) = 500$. Con $N = 1000$ y $k = 1/250$. Es decir, debemos resolver:

$$500 = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}} \rightarrow 499 = e^{4t}$$

Así, en el instante $t = \frac{1}{4}\ln(499) \cong 1.55$

12. Las integrales respectivas resultan en:

a) $\frac{1}{3}ln(y)+C$

b) $2cos(x)+C$

c) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+C$

d) $2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

e) $\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^3+ln(|x|)+C$

f) $x-\frac{e^{-3x}}{3}+\frac{e^{5x}}{5}+C$

13. Se tiene que:

a) $\ln(|x^3-4x^2+1|)+C$

b) $\frac{1}{5}(\ln(|x^5+\cos(5x)-4\,|))+C$

c) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}+5\right)^{4/3}+C$

d) $x-3\ln(x+4)+C$

e) $\frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}}(x^2-4)+C$

f) $\frac{(1-x)^{16}}{16}-\frac{(1-x)^{17}}{17}+C$

g) $\frac{1}{2}(x^2-2x+6\ln(x+4)-24)+C$

h) $4x-3\ln(e^x+1)+C$

i) $-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{3}\ln(|x-1|)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

j) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+10)+\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$

k) $\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$

l) $-\frac{2}{\sqrt{5}}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{5}}\right)$+C

m) $-\frac{7}{\ln x}+C$

n) $2\ln(|x+2|)-\ln(|x+3|)+C$

o) $x-\frac{10}{x+1}-2\ln(|x+1|)+C$

p) $\ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)+C$

q) $\frac{(4x+7)^6}{24}+C$

r) $x+6\sqrt{x}+12\ln\left(|\sqrt{x}-2|\right)+C$

s) $\frac{1}{9}\left(x^3+(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right)+C$

t) $\frac{(7x-1)^{13}}{91}+C$

u) $\frac{x^2}{2}+\frac{\ln(|x|)}{2}+\frac{\ln(|x+2|)}{2}+C$

v) $-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)+C$

w) $\frac{e^{2t}}{2}-3e^t-\ln(e^t+1)+8\ln(e^t+2)+C$

x) $\frac{\tan^{-1}(2^x)}{\ln(2)}+C$