Actividades Clase 11
Integral Indefinida

---

1. (Actividad Diapositiva 11) Aproximar el valor de $\sqrt{5.08}$

   Tomamos $y = \sqrt{x}$, y queremos encontrar una aproximación para $\sqrt{5.08}$.

   Primero encontramos la derivada de y:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   El diferencial dy se puede aproximar como $dy = \frac{dy}{dx}dx$:

   $$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

   Evaluamos dy para $x = 4$ y $dx = 1.08$:

   $$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 1.08$$
   $$dy = 0.027$$

   Por lo tanto, $\sqrt{5.08} \approx \sqrt{4} + dy \approx 2.27$.

2. Actividad Diapositiva 16) Determinar el diferencial de $f(x) = 3\sin(x^2)$

   La derivada de $f(x)$ es:

   $$f'(x) = 3\cos(x^2) \cdot 2x$$

   Por lo tanto, el diferencial df se puede expresar como $df = f'(x)dx$:

   $$df = 6x\cos(x^2)dx$$

3. (Actividad Diapositiva 25) Determinar

   a) $\int \frac{5x-3}{x}\,dx$
   Esta integral se puede simplificar como:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-3}{x}\,dx &= \int 5 - \frac{3}{x}\,dx \\ &= \int 5\,dx - \int 3x^{-1}\,dx \\ &=5\int dx - 3\int x^{-1}\,dx \\ &=5x - 3\ln|x| + C\end{aligned}$$

   La solución es:

$$\int \frac{5x-3}{x} = 5x - 3\ln|x| + C$$

   b) $\int e^{3x}\,dx$
   La integral se resuelve fácilmente utilizando el método de sustitución directa $u = 3x$, resultando en:

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}e^{u} + C \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} + C\end{aligned}$$

4. Ejercicios Métodos de Sustitución - Resolver las siguientes integrales:

   a) (Diapositiva 27) $\int (4x+1)^{100}\,dx$
   Aquí usamos la sustitución $u = 4x+1$, de donde $du = 4\,dx$, y $dx = du/4$:

$$\begin{aligned}\int (4x+1)^{100}\,dx &= \frac{1}{4}\int u^{100}\,du\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{101}u^{101} + C\\ &= \frac{1}{404}(4x+1)^{101} + C\end{aligned}$$

   La solución es por lo tanto:

$$\int (4x+1)^{100}\,dx = \frac{1}{404}(4x+1)^{101} + C$$

   b) (Diapositiva 28) $\int xe^{x^2}\,dx$
   Utilizamos la sustitución $u = x^2$, de donde $du = 2x\,dx$, y $dx = du/(2x)$:

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^u\,du\\ &= \frac{1}{2}e^u + C\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + C\end{aligned}$$

   La solución es:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

   c) (Diapositiva 29) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$
   Utilizamos la sustitución $u = x-1$, de donde $du = dx$, y $x = u+1$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int (u+1)\sqrt{u}\,du\\ &= \int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du\\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C\\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

   La solución es:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

5. (Actividad Diapositiva 25) Determinar:

   a) $\int 2x^2 \cos(x^3)\, dx$
   Aquí usamos la sustitución $u = x^3$, de donde $du = 3x^2\, dx$, y $dx = du/(3x^2)$:

$$\begin{aligned}\int 2x^2 \cos(x^3)\, dx &= \frac{2}{3}\int \cos(u)\, du \\ &= \frac{2}{3}\sin(u) + C \\ &= \frac{2}{3}\sin(x^3) + C\end{aligned}$$

   La solución es:

$$\int 2x^2 \cos(x^3)\, dx = \frac{2}{3}\sin(x^3) + C$$

   b) $\int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx$
   Esta integral se puede simplificar haciendo la descomposición de fracciones parciales es decir, queremos expresar la fracción $\frac{1}{x^2+3x+2}$ como la suma de dos fracciones con denominadores más simples, en este caso $(x+1)$ y $(x+2)$. Así, queremos encontrar constantes A y B tal que

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

   Multiplicando ambos lados por el denominador común $x^2 + 3x + 2$ obtenemos:

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

   Esto tiene que valer para todos los x, así que podemos escoger convenientemente valores de x que simplifiquen la ecuación. Por ejemplo, si escogemos $x = -1$, la ecuación se simplifica a:

$$1 = A(-1+2) = A$$

   por lo que $A = 1$. Análogamente, si escogemos $x = -2$, obtenemos $B = -1$.
   Por lo tanto, la fracción se descompone como

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

   y por lo tanto la integral se resuelve como

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx = \int \frac{1}{x+1}\, dx - \int \frac{1}{x+2}\, dx$$

   Las integrales de fracciones con x en el denominador son simplemente el logaritmo natural, por lo que obtenemos

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$