Actividades Clase 10
Modelos Matemáticos

---

1. (Ejemplo Diapositiva 22) Linealizar el siguiente modelo $y = 1.5e^{0.5x}$

   Según el modelo, corresponde a un Exponencial, con valor de $\alpha = 1.5$ y nuestro valor de $\beta = 0.5$. Luego la linealización correspondiente quedaría:

$$\begin{aligned} z &= \ln(\alpha) + \beta v \\ z &= \ln(1.5) + 0.5v \end{aligned}$$

2. Encontrar el modelo de la siguiente recta $y = 2x + 1$ (modelo potencial)

   Como es un modelo potencial, entonces la recta en función de z y v sería:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ z &= 2v + 1 \end{aligned}$$

   Donde, recordando la recta de la linealización del modelo potencial, es: $z = \log(\alpha) + \beta v$, es decir en nuestro caso:

$$\begin{aligned} \beta &= 2 & \log(\alpha) &= 1 \\ \beta &= 2 & \alpha &= 10 \end{aligned}$$

   Por lo que el modelo potencial sería:

$$y = 10x^2$$

3. (Ejemplo Diapositiva 30) Linealizar el siguiente modelo $y = \frac{x}{2x+1}$

   El modelo corresponde a un Hiperbólico Caso 3:

$$y = \frac{x}{\alpha x + \beta}$$

   , donde los valores de $\alpha = 2$ y $\beta = 1$

   Luego, la linealización del modelo sería:

$$z = 2 + v$$

4. Encontrar el modelo hiperbólico caso 4 de la siguiente recta $y = 5x + 2$

   El modelo hiperbólico caso 4 es de la forma

$$y = \frac{\alpha x}{x + \beta}$$

   Para obtener este modelo a partir de la ecuación dada, necesitamos expresarla en la forma requerida.

   Dado que la ecuación dada es $y = 5x + 2$, es decir, en el plano VZ quedaría: $z = 2 + 5v$. Ahora debido a que la forma de este modelo linealizado es:

$$z = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot v$$

   Se tendrá:

$$\frac{1}{\alpha} = 2 \qquad \frac{\beta}{\alpha} = 5$$
$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{5}{2}$$

   Por lo que el modelo finalmente sería:

$$y = \frac{\frac{1}{2}x}{x + \frac{5}{2}}$$
$$y = \frac{x}{2x + 5}$$

5. (Actividad Diapositiva 31) Linealizar el siguiente modelo $y = \frac{2x+1}{x}$

   El modelo corresponde a un Hiperbólico de caso 2, con valores de $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. por lo que su linealización quedaría:

$$z = \alpha + \beta v$$
$$z = 2 + v$$

6. Encontrar el modelo hiperbólico caso 3 de la siguiente recta $y = 1 - 4x$

   El modelo hiperbólico caso 3 es de la forma

$$y = \frac{x}{\alpha x + \beta}$$

   Dado que la ecuación dada es $y = 1 - 4x$, es decir, en el plano VZ quedaría: $z = 1 - v$. Ahora debido a que la forma de este modelo linealizado es:

$$z = \alpha + \beta v$$

   Se tendrá:

$$\alpha = 1 \qquad\qquad \beta = -5$$

   Por lo que el modelo finalmente sería:

$$y = \frac{x}{x - 5}$$

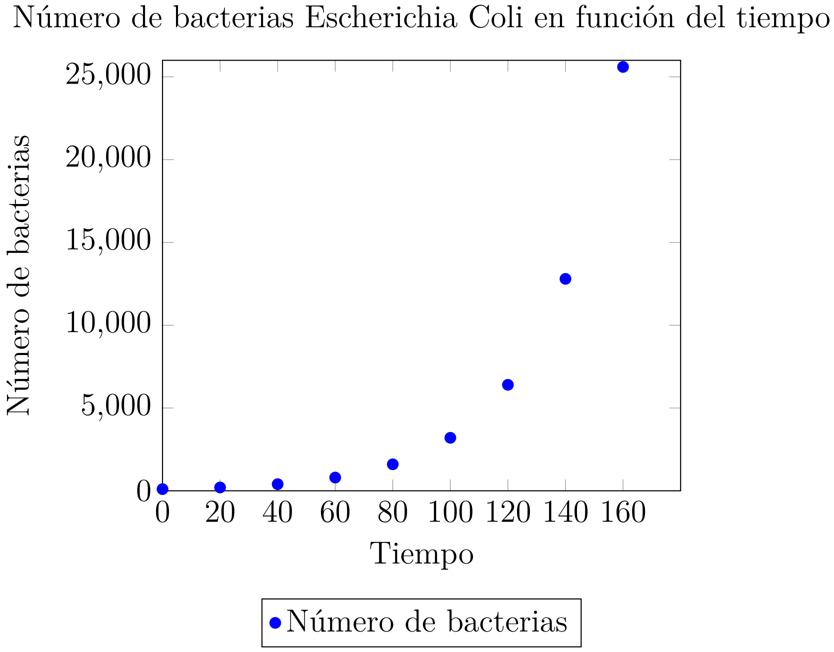
7. (Actividad Diapositiva 43) Los datos que se muestran a continuación, son producto de investigaciones experimentales realizadas en laboratorios, cuyo objetivo es encontrar una relación entre las variables involucradas en el estudio en este caso en el Número de bacterias Escherichia Coli y el tiempo.

Tiempo	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Número de bacterias	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600

Cuadro 1: Relación entre el tiempo y el número de bacterias Escherichia Coli

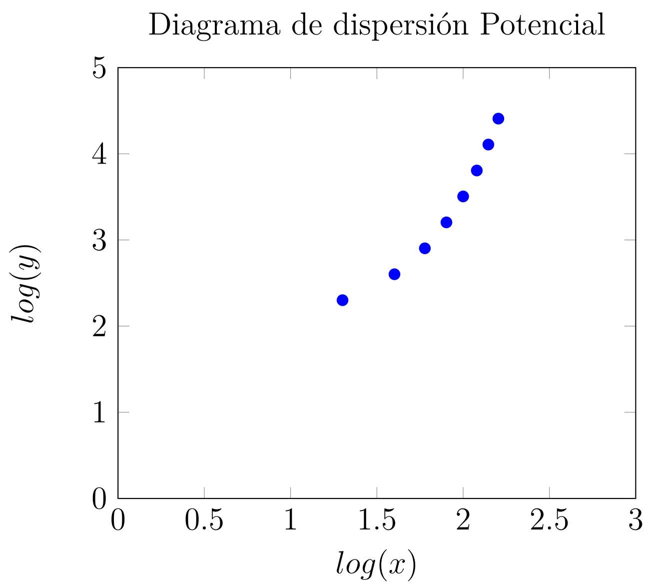
¿Cuál es el modelo de los datos experimentales?

Primero, hacemos un gráfico de dispersión de los datos para que nos hagamos una idea del la tendencia de los datos:



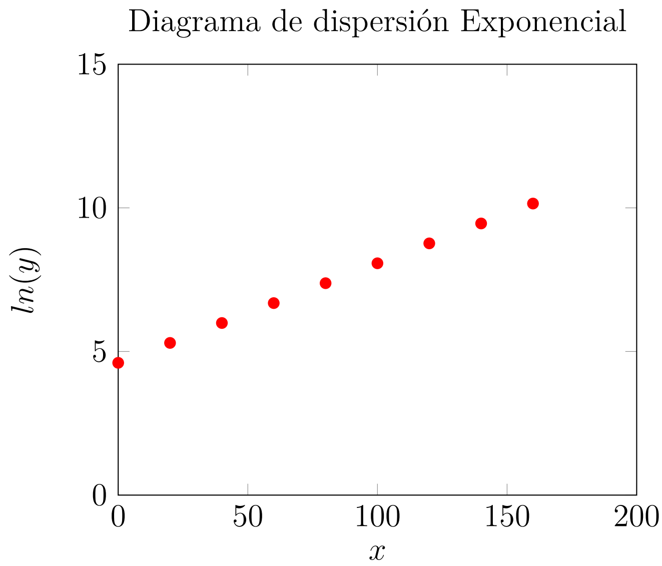
Cuadro 2: Potencial

$log(x)$	$log(y)$
1.301029996	2.301029996
1.602059991	2.602059991
1.77815125	2.903089987
1.903089987	3.204119983
2	3.505149978
2.079181246	3.806179974
2.146128036	4.10720997
2.204119983	4.408239965



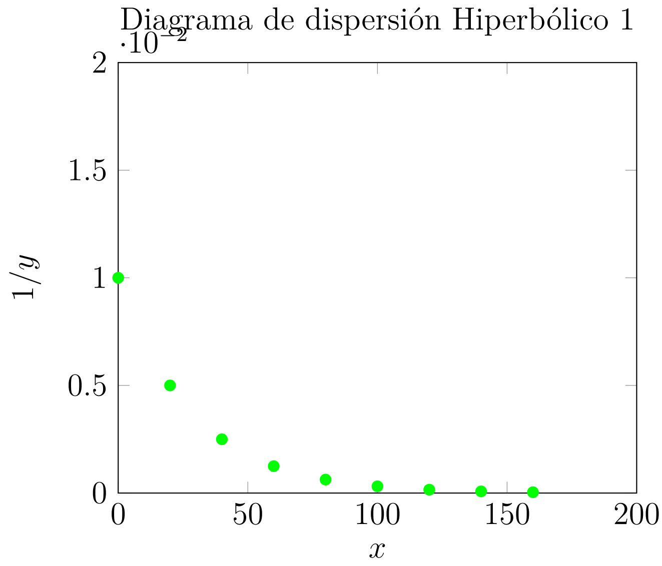
Cuadro 3: Exponencial

x	$ln(y)$
0	4.605170186
20	5.298317367
40	5.991464547
60	6.684611728
80	7.377758908
100	8.070906089
120	8.764053269
140	9.45720045
160	10.15034763



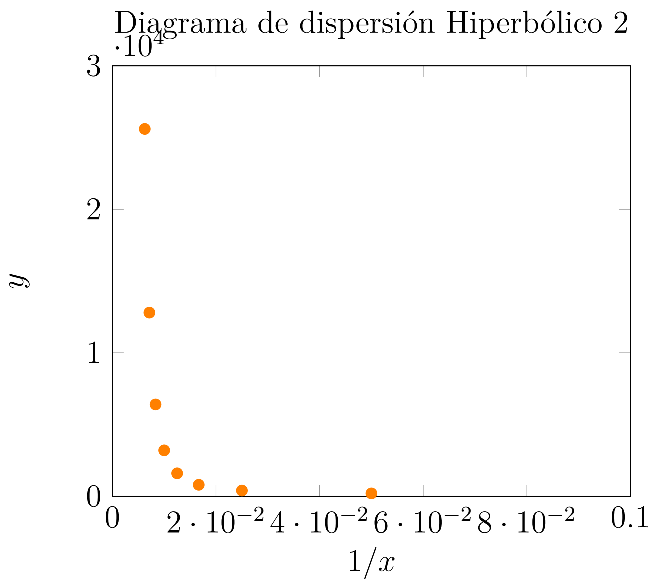
Cuadro 4: Hiperbólico 1

x	$1/y$
0	0.01
20	0.005
40	0.0025
60	0.00125
80	0.000625
100	0.0003125
120	0.00015625
140	0.000078125
160	3.90625E-05



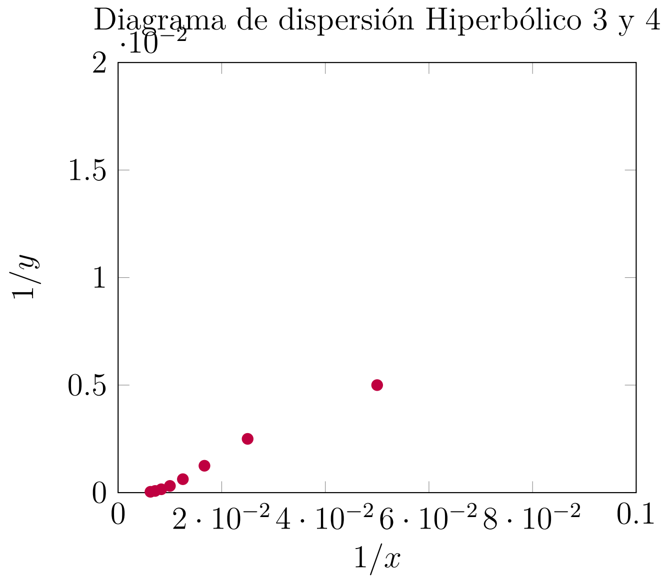
Cuadro 5: Hiperbólico 2

$1/x$	y
0.05	200
0.025	400
0.016666667	800
0.0125	1600
0.01	3200
0.008333333	6400
0.007142857	12800
0.00625	25600



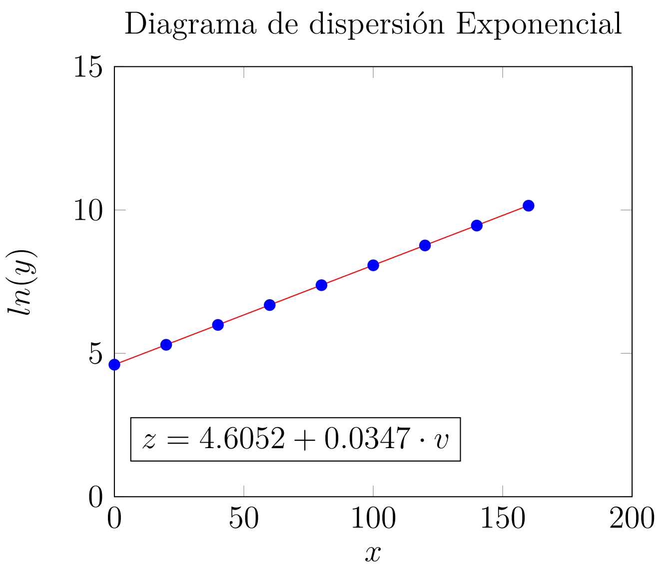
Cuadro 6: Hiperbólico 3 y 4

$1/x$	$1/y$
0.05	0.005
0.025	0.0025
0.016666667	0.00125
0.0125	0.000625
0.01	0.0003125
0.008333333	0.00015625
0.007142857	0.000078125
0.00625	3.90625E-05



Elección del Modelo

Notamos que el modelo Exponencial es aquel que, con los cambios de variable más similar a una recta es. Por lo que, calculamos la recta de regresión.



Dada la ecuación de la recta de regresión $z = 4.6052 + 0.0347v$, los parámetros para el modelo exponencial son:

$$\alpha = e^{4.6052}$$
$$\beta = 0.0347$$

Por lo tanto, el modelo exponencial es $y = e^{4.6052} \cdot e^{0.0347x}$, es decir:

$$y = e^{4.6052+0.0347x}$$