Control Formativo - Parte Desarrollo
Integral Definida

---

1. Usando la fórmula para la circunferencia $y^2 + x^2 = 1$ de radio 1, describa una ecuación integral que determine π.

   Despejamos y para definir la función a integral, esto es: $f(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$, y consideramos[1]:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$$

   aplicamos el cambio de variable $x = \cos(u)$, $dx = -\sin(u)du$, con sus respectivos cambios de límites de integración y resulta:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= -\int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \cos^2(u)}\sin(u)du \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)du\end{aligned}$$

   usamos una identidad trigonométrica en base a $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$, y $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2u)}{2}du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}du - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2u)du \\ &= u|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin(2u)|_0^{\pi/2} \\ &= \pi/2 - 0 - \frac{1}{4}\sin(\pi) + \frac{1}{4}\sin(0) \\ &= \pi/2.\end{aligned}$$

   Es decir, nos da la ecuación:

$$\pi = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx.$$

---

[1]Con límites de integración de -1 a 1 también se puede obtener una ecuación similar

2. Una función par es una función f real tal que $f(x) = f(-x)$ en todo su dominio, y una función impar es una función real g tal que $g(-x) = -g(x)$ en todo su dominio. Pruebe que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

y que

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$$

para todo a real (pueden suponer que es positivo pero es irrelevante).

Por propiedades de la integral tenemos que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{0} f(x)dx$$

hacemos el cambio de variable $y = -x$ y resulta:

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{a}^{0} f(-y)dy$$

usamos que f es par y nuevamente aplicamos propiedades de la integral:

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(y)dy$$

dejamos la variable de integración con el mismo símbolo y resulta:

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \end{aligned}$$