FÓRMULAS DE APOYO
Integral Definida y Área entre Curvas

Propiedades de la integral:

a) La integral definida es lineal:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^a kf(x)dx = 0$$

b) Si c es un valor perteneciente al intervalo (a, b), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

c) Recordemos que f se dice función par en el intervalo $[-b, b]$ si $f(x) = f(-x)$ para todo x en dicho intervalo, y que g es función impar en el intervalo $[-a, a]$ si $g(-x) = -g(x)$ para todo x perteneciente al intervalo $[-a, a]$. Para esta clase de funciones tenemos las siguientes propiedades:

$$\int_{-b}^b f(x)dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^a g(x)dx = 0$$

Primer teorema fundamental del cálculo: Dada una función f integrable sobre el intervalo [a,b], definimos F sobre [a,b] por $F(x) = \int_a^b f(x)dx$. Si f es continua en $c \in (a, b)$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$. Utilizando lo anterior y la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x)dx = f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x).$$

Segundo teorema fundamental del cálculo: Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a,b]$ y sea $F(x)$ cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$. Entonces

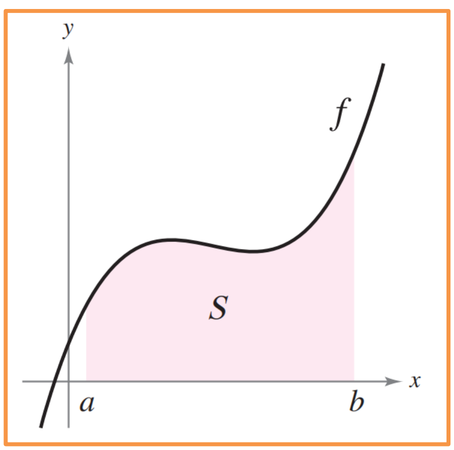
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Longitud de curva: La longitud de la curva $y = f(x)$ entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ viene expresada mediante la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Área de una región Plana

Sea $y = f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo cerrado $[a,b]$. La interpretación geométrica de la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ representa la medida del área de la región de plano comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.



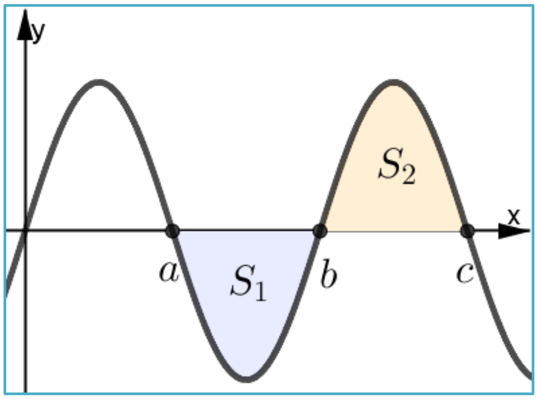
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Observación: Si el área buscada está completamente bajo el eje x, el resultado de la integral definida será un número negativo, por lo que se debe considerar su inverso aditivo de dicho número.

Recomendado:

https://ggbm.at/Na7VPXFk

Si el área buscada está por sobre el eje x y otra parte bajo el eje x, se debe encontrar la abscisa c de la intersección de la función $f(x)$ con el eje x y se deben considerar dos integrales para el cálculo del área total.



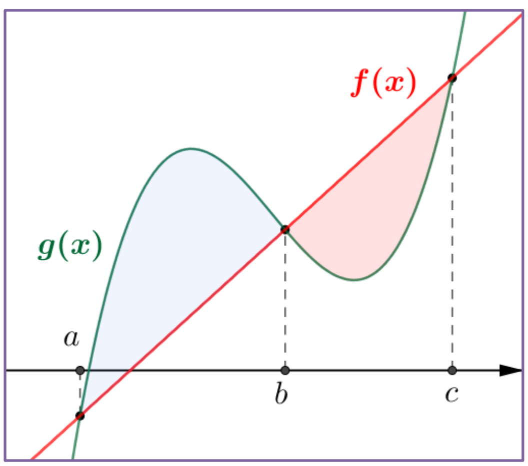
$$S = S_1 + S_2$$

Donde:

$$S_1 = -\int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = \int_b^c f(x)dx$$

En el caso de que se busque el área entre dos funciones, es igual al área de la función que está situada por encima menos el área de la función que está situada por debajo del intervalo.



Notamos que en $[a,b]$ $g(x) \geq f(x)$ para todo x

Y en $[b,c]$ $f(x) \geq g(x)$ para todo x, por lo que:

$$\text{Área} = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$$

Funciones de Densidad

Matemáticamente, una función f es una función de densidad de una variable aleatoria X si verifica dos propiedades:

- $f(x)$ es mayor o igual que cero en cualquier punto x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (el área bajo la curva y el eje horizontal vale uno)

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$