Actividades Clase 12
Integral Definida

---

1. Considere la región R acotada por $f(x) = e^x$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$. Determine suma superior y suma inferior.

   Para la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 2]$ la suma de Riemann superior se obtiene utilizando el valor máximo de la función en cada subintervalo, mientras que la suma de Riemann inferior se obtiene utilizando el valor mínimo de la función en cada subintervalo.

   Supongamos un número arbitrario de intervalos, $n = 10$. La longitud de cada subintervalo, dado que $n = 10$, es $\Delta x = \frac{2-0}{10} = 0.2$. Los puntos en el intervalo son entonces $0, 0.2, 0.4, ..., 2.0$.

   Para la función $f(x) = e^x$, los valores aumentan conforme aumenta x. Por lo tanto, para la suma superior, el valor máximo en cada subintervalo se encuentra en el extremo derecho, mientras que para la suma inferior, el valor mínimo se encuentra en el extremo izquierdo.

   La suma de Riemann superior es entonces:

$$S = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{10} e^{0.2i} \cdot 0.2$$

   La suma de Riemann inferior es:

$$S = \sum_{i=0}^{9} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{9} e^{0.2i} \cdot 0.2$$

   Gráficamente se pueden observar:

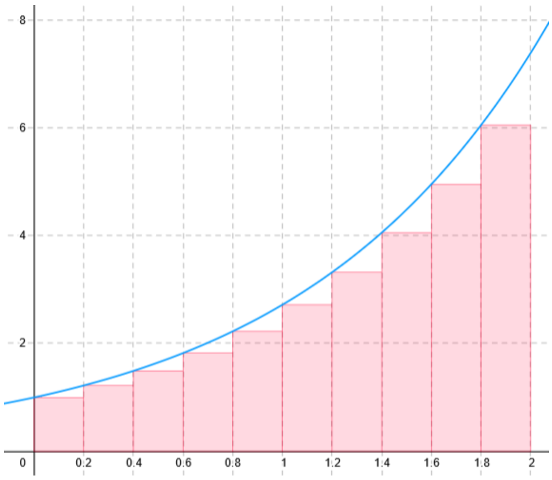

Figura 1: Suma Inferiores para $n = 10$

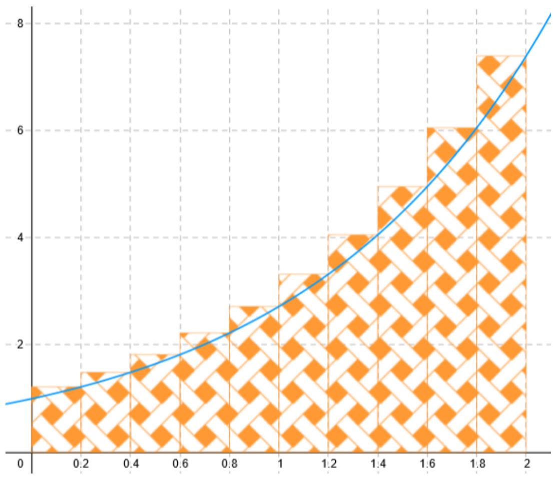

Figura 2: Suma Superiores para $n = 10$

2. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x} dx$
   Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x} dx &= [\ln|x|]_{e^2}^{e^3} \\ &= \ln(e^3) - \ln(e^2) \\ &= 3 - 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

   b) $\int_2^0 \sqrt{4x+1} dx$
   Para esta integral, hacemos el cambio de variable $u = 4x + 1$, luego $du = 4dx$. Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\begin{aligned}\int_2^0 \sqrt{4x+1} dx &= \frac{1}{4}\int_9^1 \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{3}([\frac{2}{3}u^{3/2}]_9^1) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}9^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

3. Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = 2e^{-x}$ y las rectas $y = -\ln 2$ e $y = \ln 2$.
   La integral que calcula el área A es:

$$A = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} 2e^{-x}\, dx$$

   La integral de e^{-x} es simplemente $-e^{-x}$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$A = 2\left[-e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{\ln 2} = 2\left[-e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}\right] = 2\left[2 + \frac{1}{2}\right] = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

   Por lo tanto, el área de la región acotada por las curvas es 3 unidades cuadradas.

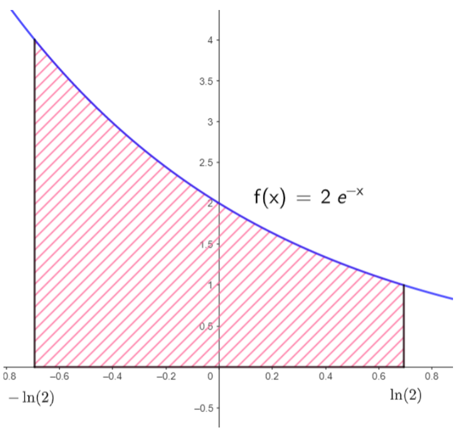

Figura 3: Área entre $-\ln 2$ y $\ln 2$ de la función $y = 2e^{-x}$

4. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Para encontrar el área de la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$, primero necesitamos encontrar los puntos de intersección de las dos curvas. Igualamos las dos ecuaciones para encontrar estos puntos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x \\ x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Esto significa que las dos curvas se cruzan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. La región acotada por las dos curvas se encuentra entonces entre estos dos puntos.

Ahora, necesitamos calcular el área entre las curvas. Esta área es la integral definida de la diferencia absoluta de las dos funciones, desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Como $\sqrt{x} \leq x$ en este intervalo, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - \sqrt{x})\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región acotada por las curvas es $\frac{1}{6}$ unidades de área.

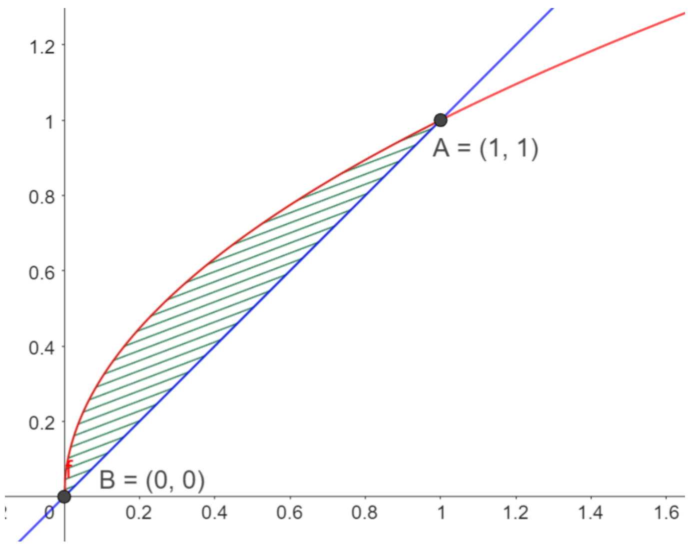

Figura 4: Área entre las funciones $y = x$ e $y = \sqrt{x}$

5. Usar la función de probabilidad vista:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para otro valor de } x \end{cases}$$

Muestre que $f(x)$ cumple las condiciones para ser una función de probabilidad.

Una función de probabilidad debe satisfacer dos condiciones: debe ser no negativa para todos los valores de x y su integral sobre todo el espacio de probabilidad debe ser igual a 1.

a) Una función es no negativa para todos los valores de x si es que $f(x) \geq 0$ para todo x. Para nuestra función, $f(x) = \frac{2}{5}(x+2)$ para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso, se puede observar fácilmente que es no negativa en todo su dominio, ya que el término $(x+2)$ es siempre no negativo para x en el intervalo $[0,1]$ y el factor $\frac{2}{5}$ también es no negativo.

b) La integral de $f(x)$ sobre todo el espacio de probabilidad debe ser igual a 1.
Esto significa que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Para nuestra función $f(x)$, esto se descompone en dos integrales, una sobre el intervalo $[0,1]$ y la otra sobre el resto del eje real. Así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(x+2)\,dx + \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx$$

La integral de una función constante cero es cero, por lo que nuestras dos últimas integrales no aportan nada a la suma. Solo necesitamos calcular la primera integral:

$$\int_{0}^{1} \frac{2}{5}(x+2)\,dx = \frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 = \frac{2}{5}(\frac{1}{2} + 2 - 0) = 1$$

Dado que ambas condiciones se cumplen, $f(x)$ es una función de probabilidad.