Control Formativo - Parte Desarrollo Derivadas

1. Calculamos la derivada de f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 36x - 42 \\ &= 6(x^2 - 6x - 7) \\ &= 6(x-7)(x+1) \end{aligned}$$

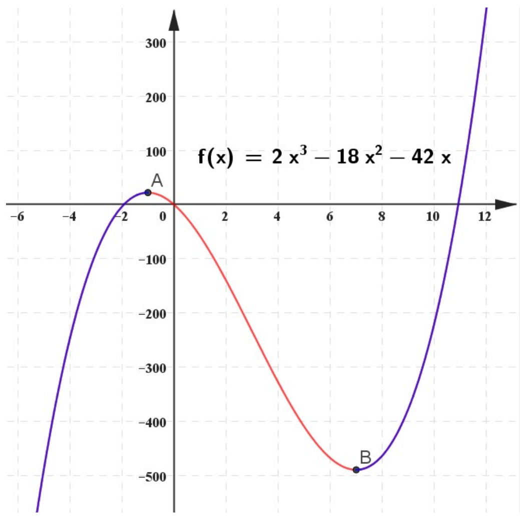
Con esto, obtenemos que los puntos en donde se anula $f'(x)$ son $x = 7$ y $x = -1$. Como $f'(x)$ es una cuadrática con coeficiente líder positivo, tenemos que es cónvava y luego, su menor valor, podemos obtenerlo calculando su vértice:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) &= V\left(\frac{36}{12}, f\left(\frac{36}{12}\right)\right) \\ &= V(3, -96) \end{aligned}$$

Con esto, obtenemos que la derivada es negativa entre -1 y 7 y positiva fuera de este intervalo. Es decir:

$$f \text{ es creciente en: }]-\infty, 1[\cup]7, \infty[$$
$$f \text{ es decreciente en: }]1, 7[$$

Tal como se puede apreciar en la gráfica:



La comparación y diferencia principal que podemos hacer con $f(x) = x^3$ es que ésta última es creciente para todo su dominio, a pesar de que exista un punto crítico en $x = 0$ notamos que su derivada $f'(x) = 3x^2$ es positiva en todo su dominio. Por lo que siempre es creciente.

2. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f(x)}\right)' &= -\frac{1}{f^2(x)2} \cdot f'(x) \\ &= \frac{-f'(x)}{f^2(x)}\end{aligned}$$

Ahora usamos la regla del producto para derivar $\frac{g(x)}{f(x)}$:

$$\begin{aligned}\left(g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right)' &= g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x) \cdot \left(\frac{1}{f(x)}\right)' \\ &= g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x) \cdot \frac{-f'(x)}{f^2(x)} \\ &= \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)}\end{aligned}$$