Curso: Matemáticas/PPA–CIC–MAT-1
Autor: Máximo Flores Valenzuela (maximo.flores@ug.uchile.cl)

Material complementario: Números racionales

16 y 18 de mayo de 2023

- **[Definición: Múltiplos]:** Para esta definición, consideraremos sólo los números naturales. Tomemos un número cualquiera, obtenemos un múltiplo de él al multiplicarlo por otro número natural. Ejemplo: el 6 es múltiplo de 3, porque $3 \cdot 2$ me da 6. El 4 es múltiplo de 4, porque $4 \cdot 1 = 4$.

  También podemos construir múltiplos de un número sumándolo a cada rato (que corresponde con la definición de multiplicación). Ejemplo:
  $$7 + 7 + 7 + 7 = 28 = 7 \cdot 4$$
  Entonces 28 es múltiplo de 7.

  Reglas (o trucos) para saber si un número es múltiplo de otro:

  - Todo número es múltiplo de sí mismo (ej: 100 es múltiplo de 100, porque $100 \cdot 1 = 100$).
  - Un número es múltiplo de 2 si es par (ej: 18, 40).
  - Es múltiplo de 3 si la suma de sus dígitos da un múltiplo de 3 (ej: 192, donde $1 + 9 + 2 = 12$, que sabemos que es múltiplo de 3, pues $3 \cdot 4 = 12$).
  - Es múltiplo de 4 si el número es par, y además al dividirlo por 2 sigue siendo par (ej: 28, 96).
  - Es múltiplo de 5 si termina en 5 o en 0 (ej: 75, 890).
  - Es múltiplo de 6 si cumple ser múltiplo de 2 y 3 al mismo tiempo (ej: 24, es par, por lo tanto múltiplo de 2, y $2 + 4 = 6$, que es múltiplo de 3).
  - Es múltiplo de 10 si termina en 0 (ej: 40, 900).

  Las reglas o trucos para los números que faltan son más enredadas, así que otra forma de comprobar si es múltiplo que es acercándose al número que quiero revisar. Por ejemplo, queremos comprobar si 433 es múltiplo de 7. Podemos escribir la tabla del 7 hasta $7 \cdot 10$:
  $$\begin{aligned} 7 \cdot 1 &= 7 \\ 7 \cdot 2 &= 14 \\ 7 \cdot 3 &= 21 \\ 7 \cdot 4 &= 28 \\ 7 \cdot 5 &= 35 \\ 7 \cdot 6 &= 42 \\ 7 \cdot 7 &= 49 \\ 7 \cdot 8 &= 56 \\ 7 \cdot 9 &= 63 \\ 7 \cdot 10 &= 70 \end{aligned}$$

  ¿Cómo podemos acercarnos al 433? Noten que 42 y 49 son los más cercanos si le agregamos un cero al final (es decir, si los multiplicamos por 10). Si hacemos esto, seguirán siendo múltiplos de 7, porque:
  $$7 \cdot 6 \cdot 10 = 420 \text{ y } 7 \cdot 7 \cdot 10 = 490$$
  Y notemos que lo primero es $7 \cdot 60 = 420$, lo segundo $7 \cdot 70 = 490$, o sea cumplen la definición de ser múltiplo. Ahora bien, nos conviene tomar el que esté más cerca de 433, en este caso 420. Cuando el más chico sea el que está más cerca, le vamos sumando 7 hasta pasarnos o coincidir, o sea:
  $$\begin{aligned} &420 + 7 = 427 \\ &427 + 7 = 434 \text{ ¡nos pasamos!} \end{aligned}$$

Como no coincidió en ningún momento, entonces 433 no puede ser múltiplo de 7 (pero 434 sí lo es). Si hubiéramos querido comprobar que 462 es múltiplo de 7, deberíamos haber partido de 490 que es el más cercano, y restar 7 hasta pasarnos o coincidir:

$$\begin{aligned}490 - 7 &= 483\\ 483 - 7 &= 476\\ 476 - 7 &= 469\\ 469 - 7 &= 462 \text{ ¡coincidimos!}\end{aligned}$$

Entonces 462 es múltiplo de 7.

- **[Definición: Número primo]:** Un número primo es aquel que sólo se puede dividir por sí mismo, y el 1. *Observación importante: A pesar de que el* 1 *cumple esta definición, el* 1 ***no*** *es primo.*

  Ejemplos de números primos:

  - El 2 lo es, porque solo se puede dividir por sí mismo ($2/2 = 1$ y por el 1, $2/1 = 2$).
  - El 3 lo es por el mismo motivo, así mismo el 5, 7, 11, etc.

  El 9 **no** es número primo, porque también es divisible por 3.

- **[Definición: Mínimo Común Múltiplo (MCM)]:** El mínimo común múltiplo corresponde al primer múltiplo en común entre dos números. Por ejemplo, mínimo común múltiplo entre 2 y 3 (también escrito $\text{mcm}(2,3)$) es 6, porque:

  $$\begin{aligned}\{2,4,6,8,10,\dots\} &\text{ son los múltiplos de 2.}\\ \{3,6,9,12,15,\dots\} &\text{ son los múltiplos de 3.}\end{aligned}$$

  Entonces el primero que se repite es el 6. Otra forma de calcular el mínimo común múltiplo es con la multiplicación de los factores primos. Por ejemplo, queremos calcular el MCM entre 8 y 12. Sabemos que podemos descomponer $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ y $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Noten que el 2 es un factor primo repetido.

  Entonces en este caso, tomamos el número donde más se repita el 2, y se repite 3 veces en el 8. Así, el MCM entre 8 y 12 es $\text{mcm}(8,12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

  También podemos calcular el mínimo común múltiplo entre varios números. Para esto, se ocupa el método de la tabla, que divide todos los números hasta que lleguen a 1, y luego se multiplican los divisores usados (ver apunte).

  Ejercicios: Calcular el MCM de los siguientes números:

  a) 6 y 8
  b) 12, 30 y 40
  c) 24 y 50
  d) 4, 5 y 6
  e) **[Propuesto]:** 5, 25 y 2 (solución en el apunte).

- **[Definición: Fracción]:** Una fracción es de la forma $\dfrac{\text{algún número}}{\text{otro número}}$, y representa la división entre ambos, es decir, si tenemos la fracción $\dfrac{2}{3}$ esto es equivalente a calcular $2:3$. Cuando el resultado de la división está entre 0 y 1, la fracción representa qué parte de un todo se está considerando (ej: al cortar una pizza).

  Al número de arriba se le llama *numerador* y al de abajo *denominador*. La gracia de las fracciones es que le pueden aplicar operaciones usando reglas definidas.

- **[Amplificación y simplificación de fracciones]:**

  - Amplificar una fracción corresponde al proceso donde nosotros aumentamos el numerador y denominador multiplicándolos por el mismo número, pero sin alterar el valor de la fracción. Por ejemplo:

    $$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \dots$$

    Este proceso se puede realizar muchas veces (¡infinitas!).

  - Simplificar una fracción es el proceso inverso, donde uno reduce el numerador y denominador dividéndolos por el mismo número, sin alterar el valor de la fracción. Por ejemplo:

$$\frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \text{ ya no se puede dividir más :(}$$

    Este proceso cuando termina se dice que conseguimos una **fracción irreducible**.

  Aplicación: Verificar que $\frac{3}{2}$ es lo mismo que $\frac{45}{30}$ usando simplificación o amplificación.

- **[Fracciones irreducibles]:** Se dice que es una fracción es irreducible (o irreductible), si tanto el numerador como el denominador no tienen factores en común distintos de 1 o -1. *¿Por qué? Fíjense que si hubiera algún factor en común distinto de 1 o -1, entonces podemos simplificar la fracción dividiendo el numerador y denominador por dicho número.*

- **[Multiplicación y división de fracciones]:** La receta de multiplicación de fracciones es sencilla: multiplicamos los numeradores y los denominadores. Esos resultados los insertamos en la fracción resultante. Por ejemplo:

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$$

  Para la división es muy similar, salvo que debemos dar vuelta la segunda fracción y pasar de división a multiplicación, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8}$$

- **[Suma y resta de fracciones]:** Hay varias formas de ver estas operaciones, la más conocida es con la multiplicación cruzada:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

  Y en la resta es lo mismo:

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 1}{7 \cdot 4} = \frac{8-7}{28} = \frac{1}{28}$$

  Para este método, cuando tenemos 3 o más fracciones, podemos hacer las operaciones de a pares. Es decir,

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot 4}{4 \cdot 5} + \frac{2}{3} = \frac{15+28}{20} + \frac{2}{3} = \frac{43}{20} + \frac{2}{3} = \frac{43 \cdot 3 + 20 \cdot 2}{20 \cdot 3} = \frac{129+40}{60} = \frac{169}{60}$$

  Fíjense que con "a pares" nos referimos a tomar las dos primeras, operarlas con el método, y después al resultado de eso operarla con la tercera. **IMPORTANTE:** Tener cuidado con la prioridad de operaciones vista en la clase pasada. Hay que respetarla siempre.

  Ahora resolvamos estas mismas operaciones pero usando **otro método**: el MCM aprendido anteriormente. La idea es la siguiente:

  - **Paso 1:** Queremos igualar los denominadores (parte de abajo de la fracción).
  - **Paso 2:** Si lo logramos, bastaría sumar o restar los numeradores (parte de arriba de la fracción) para obtener el resultado.

  Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \ ?$$

  Para igualar los denominadores, basta buscar el MCM entre 2 y 3. Sabemos que es 6. El siguiente paso es amplificar ambas fracciones hasta que el denominador quede con el MCM. En este caso, la primera la podemos amplificar por 3, y la segunda por 2:

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

  A este punto ya logramos el **Paso 1**. Ahora, solo debemos aplicar el **Paso 2** que nos dice: suma o resta según corresponda los numeradores. Es decir,

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

  Como podemos notar, obtuvimos el mismo resultado. Cuando queremos sumar o restar 3 o más fracciones con este método, la forma más corta es calculando el MCM de todos los denominadores involucrados, y después amplificando cada fracción hasta que todos los denominadores queden con el MCM calculado.

- **[Comparación entre fracciones]:** Hay una pregunta que puede surgir de manera natural. ¿Cómo sé si una fracción es mayor o menor que otra? Veamos primero los casos particulares:
  - **Fracciones con igual denominador:** Basta comparar los numeradores de la forma usual. Ejemplo:
  $$\frac{2}{7} < \frac{4}{7} \text{ porque } 2 < 4$$
  - **Igual numerador:** Como el denominador indica en cuántas partes se divide el numerador, ahora la comparación es la contraria (denominador más grande significa que dividimos en más partes, por lo tanto el resultado es más chico). Ejemplo:
  $$\frac{3}{5} > \frac{3}{7} \text{ porque } 5 < 7$$

  Ahora veamos el caso general usando la amplificación. Queremos saber cuál es más grande entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$. Para ello, vamos a amplificar cada fracción por el denominador de la otra:
  $$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{27}{63}$$
  $$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{28}{63}$$
  Ahora podemos hacer la comparación del primer caso, pues el denominador es el mismo. Notemos que $27 < 28$, por lo tanto $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$.

- **[Tipos de decimales]:** Existen distintos tipos de decimales. Estos se suelen representar con una coma ”,” o un punto ”.” y tienen la siguiente clasificación:
  - *Decimales finitos:* Son todos aquellos que tienen un número **no** infinito de dígitos después de la coma.
  $$\{0.6, 7.8, 9.6345, 7.06\}$$
  - *Decimales periódicos:* Son aquellos decimales que tienen infinitos dígitos después de la coma, y estos se repiten según el periodo:
  $$\{0.\overline{7}, 0.\overline{85}, 1.\overline{4}, 12.\overline{07}\}$$
  Ejemplo de un periodo: $0.\overline{914} = 0.914914914\ldots$.
  - *Decimales semiperiódicos:* Son aquellos decimales que tienen infinitos dígitos después de la coma, sin embargo sólo parte de ellos se repiten:
  $$\{1.0\overline{7}, 0.3\overline{45}, 8.3\overline{6}\}$$
  Ejemplo de un semiperiodo: $2.4\overline{23} = 2.423232323\ldots$.
  - *Decimales no periódicos:* Son aquellos decimales que son infinitos pero no tienen algún patrón definido que se repita:
  $$\{\pi, \sqrt{2}, \pi^2, \sqrt{5}\}$$
  El número π está definido como $3,14159\ldots$.

- **[Suma y resta de decimales]:** La suma y resta de decimales consiste en la operación que hacemos usualmente cuando operamos con números enteros, salvo que en este caso hay que ordenar los números para que la coma quede en la misma posición vertical. Por ejemplo: $\begin{array}{rr} & 3,451 \\ + & 3,24 \\ \hline & 6,691 \end{array}$. Para la resta es igual.

- **[Multiplicación de decimales]:** Para multiplicar decimales, hacemos la multiplicación usual como si fueran números enteros, y luego corremos la coma tantas veces como esté corrida en cada factor. Por ejemplo:
  $$34,5 \cdot 1,2 = 345 \cdot 12 = 41,40 = 41,4$$
  Noten que la coma se corre 2 veces, porque en $34,5$ está corrida 1 vez, y en $1,2$ otra vez.

Observación: *Cuando uno multiplica un decimal por una potencia de* 10*, es decir, un número que parta con* 1 *y siga con puros ceros (como el* 1000*,* 100*,* 10*), el resultado es el número original, pero con la coma corrida tantas veces hacia la derecha como ceros hayan. Por ejemplo:*

$$7,53 \cdot 10 = 75,3 \text{ o } 23,4151 \cdot 100 = 2341,51 \text{ o } 1,1 \cdot 1000 = 1100$$

Es importante notar que cuando ya no podemos correr más la coma hacia la derecha porque llegamos al extremo del número, hay que ir agregando ceros.

- **[División de decimales]:** Para la división de decimales, la podemos escribir como fracción y amplificarla hasta que nos queden números enteros (véanlo como multiplicar por 10). Por ejemplo, si queremos hacer la división:

$$1,26 : 0,7 = \frac{1,26}{0,7} = \frac{126}{70}$$

Y podemos aplicar lo que vimos de simplificación de fracciones:

$$\frac{126}{70} = \frac{83 \cdot 2}{35 \cdot 2} = \frac{83}{35}$$

Ahora que la fracción es **irreducible**, debemos ocupar el algoritmo usual de la división:

$$83 : 35 \approx 2,37$$

Ahora bien, si dividimos por una potencia de 10, el resultado será el mismo número, pero con la coma corrida a la izquierda tantas veces como 0 hayan en el divisor:

$$459,12 : 10 = 45,912 \text{ y } 1,4141 : 100 = 0,014141$$

Noten que cuando la coma llega al extremo de nuestro número, hay que ir agregando ceros hacia la izquierda en el resultado (muy similar a como se hacía con la multiplicación).

- **[Pasar de decimal a fracción]:** Para lograr este objetivo, tendremos que separarnos en casos según el tipo de decimal:

Caso 1: *Decimal finito:* Lo primero que haremos será escribir el número entero en el numerador de una fracción, y en el denominador va un 1 acompañado de tantos ceros como decimales hayan. En este caso hay 3 decimales (la parte decimal de 3,451 es 451), entonces el denominador sería 1000. Luego:

$$3,451 = \frac{3451}{1000}$$

Explicación: Esto lo podemos ver como una amplificación del número original, porque sabemos que:

$$3,451 = \frac{3,451}{1} = \underbrace{\frac{3,451}{1} \cdot \frac{1000}{1000}}_{\text{amplificación por 1000}} = \frac{3451}{1000}$$

Caso 2: *Decimal periódico:* Lo que haremos en este caso será anotar el número en el numerador, restarle todo lo que sea la parte no periódica (como número entero) y dividirlo por un número compuesto por tantos 9 como decimales hayan:

$$5,\overline{104} = \frac{5104 - 5}{999} = \frac{5099}{999}$$

Arriba anotamos el número sin la coma, restándole 5 que es la parte que no tiene periodo, y abajo tres nueves porque hay 3 decimales.

Explicación: Podemos multiplicar el decimal por una potencia de 10 que tenga tantos ceros como números después de la coma (en este caso 3):

$$5,\overline{104} \cdot 100 = 5104,\overline{104}$$

Y luego, le restamos el número original, con la regla aprendida:

$$5,\overline{104} \cdot 100 - 5,\overline{104} = 5104,\overline{104} - 5,\overline{104} = 5099$$

Ahora, tenemos que notar que si tenemos 100 veces un número, y se lo restamos una vez, obtenemos 99 veces dicho número (por cómo funciona la resta). Entonces:

$$5,\overline{104} \cdot 99 = 5099$$

Finalmente dividimos por 99 en ambos lados, y obtenemos:

$$5,\overline{104} = \frac{5099}{99}$$

- **[Definición: Anteperiodo]:** Antes de pasar al siguiente caso, necesitamos definir lo que es el anteperiodo de un decimal. Este concepto existe para **decimales semiperiódicos**, y corresponde a todos los decimales que no son parte del periodo. Por ejemplo:

  En $4,3\overline{65}$ el 3 sería el anteperiodo, porque es decimal, y no es parte del periodo.

  Caso 3: *Decimal semiperiódico:* La única diferencia con el caso anterior, es que ahora se divide por un número que tenga tantos nueves como decimales periódicos hayan, y tantos ceros (después de los nueves) como decimales en el anteperiodo hayan. O sea, si tengo:

$$5,9\overline{3} = \frac{593 - 59}{90} = \frac{534}{90}$$

  Notemos que esta fracción es reducible, es decir, podemos expresarla de otra forma con un numerador y denominador más pequeños.

- **[Aproximación]:** Las aproximaciones en decimales son formas cortas de representarlos, alterando el número original, pero con una cantidad de cifras significativas. Mientras más cerca esté la cantidad de decimales a la original, más representativa es la aproximación. Veremos dos tipos:
  - Aproximación por redondeo.
  - Aproximación por truncamiento.

- **[Redondeo]:**
  1. Primero, hay que identificar la posición a la cual se quiere redondear (décima, centésima, milésima, etc.).
  2. Después, observar la cifra decimal inmediatamente siguiente a la posición que determinamos en **1.**.
  3. Si la cifra obtenida en **2.** es menor a 5, la cifra original se conserva hasta el decimal que se quiere aproximar. De lo contrario, la cifra original se conserva, salvo que la posición que determina la aproximación aumenta en una unidad.

  Ejemplo: Redondee $\sqrt{5} \approx 2,23606798\ldots$ a la diez milésima. (R: $2,2361$).

- **[Tipos de redondeo]:** Existen dos formas específicas de redondear los decimales (fuera del redondeo común):
  - *Redondeo por exceso:* donde siempre redondeamos hacia arriba la cifra en la posición que nos dicen. *Ej: Redondear por exceso a la centésima el decimal* $9,792$. (R: $9,80 = 9,8$).
  - *Redondeo por defecto:* acá redondeamos hacia abajo la cifra en la posición que nos indican. *Ej: Redondear por defecto a la centésima el decimal* $9,792$. (R: $9,79$).

- **[Truncamiento]:**
  1. Identificar la posición a la que se quiere truncar.
  2. Cortar el decimal entero original hasta esa posición.

  Ejemplo: Trunque $2,491391$ a la décima. (R: $2,4$).

  Observación: El truncamiento es lo mismo que un redondeo por defecto.

- **[Aplicación: Pregunta de guía]:** Si sabemos que los primeros decimales de π son:

$$\pi = 3,141592\ldots$$

  Determinar cuál es falsa:

a) $\pi \approx 3,14$ si truncamos a la centésima.
b) $\pi \approx 3,1416$ si redondeamos a la diez milésima.
c) $\pi \approx 3,2$ si aproximamos a la décima por exceso.
d) $\pi \approx 3,14$ si aproximamos a la centésima por defecto.
e) $\pi \approx 3,142$ si redondeamos a la centésima.